Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Miage 3
Mathématiques — 2013–2014

Contrôle continu 11 Mars

Durée : 1 heure 30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

Aucun document autorisé - Calculatrice interdite

1 Combinatoire : 4 points

1. Combien de nombres à 6 chiffres, sous forme décimale, peut-on former en utilisant seulement les chiffres impairs $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

Il y a 5^6 nombres possibles.

. . . .

2. Combien de nombres à 6 chiffres, sous forme décimale, sans 0 en tête peut on former en utilisant tous les chiffres de 0 à 9 sans qu'un seul des chiffres soit répété ?

Il y a $9.9.8.7.6.5$ nombres possibles.

. . . .

3. De combien de manière peut on répartir 30 étudiants en deux groupes, TP1 et TP2, de 15 étudiants chacun ?

Il y a $\binom{30}{15}$ façons possibles de répartir 30 étudiants en deux groupes de 15.

. . . .

4. De combien de manière peut on répartir 60 étudiants en quatre groupes, TP1,TP2,TP3 et TP4, de 15 étudiants chacun ?

Il y a $\binom{60}{15,15,15,15}$ façons possibles de répartir 30 étudiants en deux groupes de 15.

. . . .

2 Loi discrète : 4 points

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	$0,1$	$0,2$	p	$0,2$	$0,1$

1. Quelle doit être la valeur de p ?

La somme des $P(X = k)$ devant être égale à 1, on en déduit que $p = 0,4$.

. . . .

2. Quelle est la fonction de répartition de X ? Tracer sa représentation graphique.

k	-2	-1	0	1	2
$F(k) = P(X \leqslant k)$	$0,1$	$0,3$	$0,7$	$0,9$	1

. . . .

3. Quelle est l'espérance de X ?

On a $E(X) = 0$.

. . . .

4. Quelle est la variance de X, quel est son écart-type ?

Puisque $E(X) = 0$, on a $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = 1,2$, d'où $\sigma = \sqrt{1,2}$.

. . . .

3 Loi binomiale (6 points)

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins. Quelle est la probabilité des événements suivants

1. A : Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent.

On note $p = 3/5$ la probabilité qu'une lettre soit affranchie au tarif urgent. La probabilité que chacun des 4 médecins reçoive une lettre au tarif normal est donc $(1-p)^4$. On en déduit que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux reçoive une lettre au tarif urgent est donc $1 - (1-p)^4$

. . . .

2. B : Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent.

On note $p = 3/5$ la probabilité qu'une lettre soit affranchie au tarif urgent. La probabilité que exactement deux des 4 médecins reçoivent une lettre au tarif normal est donc $\binom{4}{2}(1-p)^2p^2$.

. . . .

3. Soit X la variable aléatoire : nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

On a $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

. . . .

4 Loi géométrique : 8 points

4.1 Rappels

On rappelle que la loi géométrique est la loi suivie par la variable aléatoire X du nombre de lancers d'une pièce de monnaie jusqu'à apparition d'un Pile. La loi géométrique de paramètre p, est donnée par

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$

On rappelle que, pour $|x| < 1$,

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

et qu'à l'aide de la dérivation, on peut en déduire que

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

1. Montrer que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$.

L'espérance de X est $E(X) = \Sigma_{n=0}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$

. . . .

2. Montrer que $P(X > n) = (1-p)^n$

On a $P(X > n) = \Sigma_{i=n+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p = p(1-p)^n \Sigma_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$

. . . .

4.2 Problème

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2, avec $p_1, p_2 \in]0,1[$. Notons $Y = min(X_1, X_2)$ le minimum de ces deux variables.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y ?

X peut prendre n'importe quelle valeur entière.

. . . .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(Y > n)$ en fonction de p_1, p_2 et n.
3. En déduire la loi de Y. *Indication : on utilisera le fait que* $P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n)$. Quelle loi reconnaissez vous, avec quelle valeur de paramètre ?

$Y > n$ signifie que $X_1 > n$ et $X_2 > n$. Le variables X_1 et X_2 étant indépendantes, on en déduit que $P(Y > n) = P(X_1 > n \bigcap X_2 > n) = P(X_1 > n)P(X_2 > n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n$.
On en déduit alors que $P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n) = (1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1} - (1-p_1)^n(1-p_2)^n = (1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}(1-(1-p_1)(1-p_2)) = (p_1+p_2-p_1p_2)(1-(p_1+p_2-p_1p_2))^n$. La variable aléatoire $Y = min(X_1, X_2)$ est donc également une loi géométrique de paramètre $p_1 + p_2 - p_1p_2$.

. . . .

4. **Application :** on a en main deux dés qu'on lance en même temps jusqu'à l'apparition du numéro 2. Quel est le nombre moyen de doubles lancers nécessaires ?

La question est équivalent à lancer deux dés séparément jusqu'à obtention du chiffre 2 et de considérer le minimum du nombre des deux lancers. Ici, on a $p_1 = p_2 = \frac{1}{6}$ qui est la probabilité de l'apparition du 2 lorsqu'on lance un seul dé. Par conséquent, Y est une loi géométrique de paramètre $p_1 + p_2 - p_1p_2 = \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ et donc d'espérance $\frac{36}{11}$ soit environ $3,3$.

. . . .

5. Quel serait le nombre moyen de doubles lancers nécessaires pour obtenir un double 2 ?

Ici, chaque paire de chiffre a une probabilité $\frac{1}{36}$ d'apparaitre et on obtient alors une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{36}$. Le nombre moyen de lancers pour obtenir un double 2 est donc l'espérance de cette variable aléatoire qui est $\frac{1}{p} = 36$.

. . . .