Nom :

Prénom :

Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Miage 3

Mathématiques — 2013–2014

Contrôle continu 11 Mars

Durée : 1 heure 30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

Aucun document autorisé - Calculatrice interdite

1 Combinatoire : 4 points

1. Combien de nombres à 6 chiffres, sous forme décimale, peut-on former en utilisant seulement les chiffres impairs $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

2. Combien de nombres à 6 chiffres, sous forme décimale, sans 0 en tête peut on former en utilisant tous les chiffres de 0 à 9 sans qu'un seul des chiffres soit répété ?

3. De combien de manière peut on répartir 30 étudiants en deux groupes, TP1 et TP2, de 15 étudiants chacun ?

4. De combien de manière peut on répartir 60 étudiants en quatre groupes, TP1,TP2,TP3 et TP4, de 15 étudiants chacun ?

2 Loi discrète : 4 points

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	$0,1$	$0,2$	p	$0,2$	$0,1$

1. Quelle doit être la valeur de p ?

2. Quelle est la fonction de répartition de X ? Tracer sa représentation graphique.

3. Quelle est l'espérance de X ?

4. Quelle est la variance de X, quel est son écart-type ?

3 Loi binomiale (6 points)

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins. Quelle est la probabilité des événements suivants

1. A : Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent.

2. B : Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent.

3. Soit X la variable aléatoire : nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

4 Loi géométrique : 8 points

4.1 Rappels

On rappelle que la loi géométrique est la loi suivie par la variable aléatoire X du nombre de lancers d'une pièce de monnaie jusqu'à apparition d'un Pile. La loi géométrique de paramètre p, est donnée par

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$$

On rappelle que, pour $|x| < 1$,

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

et qu'à l'aide de la dérivation, on peut en déduire que

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

1. Montrer que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$.

2. Montrer que $P(X > n) = (1-p)^n$

4.2 Problème

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2, avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$. Notons $Y = min(X_1, X_2)$ le minimum de ces deux variables.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(Y > n)$ en fonction de p_1, p_2 et n.

3. En déduire la loi de Y. *Indication : on utilisera le fait que* $P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n)$. Quelle loi reconnaissez vous, avec quelle valeur de paramètre ?

4. **Application :** on a en main deux dés qu'on lance en même temps jusqu'à l'apparition du numéro 2. Quel est le nombre moyen de doubles lancers nécessaires ?

5. Quel serait le nombre moyen de doubles lancers nécessaires pour obtenir un double 2 ?