Université de Nice-Sophia Antipolis
Licence Math-Info-BIM 2
Outils Formels pour l'Informatique 2009–2010

Contrôle continu Lundi 14 Décembre

Nom :

Prénom :

Durée : 1h30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

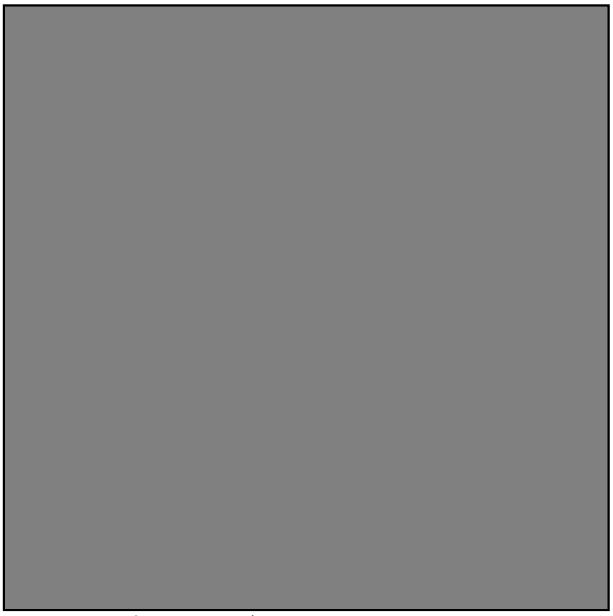
1 Question de cours : récurrences

Résoudre les récurrences

1. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour $n \geq 1$

2. $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$ pour $n \geq 1$

3. $w_1 = 1$ et $w_n = 2w_{\frac{n}{2}} + 1$ pour $n \geq 1$



2 Logique

Soient les prédicats $f(x)$: x est un facteur ; $v(x)$: x est un vélo ; $p(x,y)$: x possède y et $e(x,y)$: x égale y. Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x\,(v(x) \rightarrow (\exists z\, f(z) \wedge p(z,x)))$

2. $\forall x\, f(x) \rightarrow (\forall z\, \forall y\,(v(z) \wedge v(y) \wedge \neg e(z,y)) \rightarrow (\neg p(x,y) \vee \neg p(x,z)))$

3. $\exists x\, f(x) \wedge (\forall y\, v(y) \rightarrow \neg p(x,y))$

3 Problème

3.1 Partie I

Sur l'ensemble $\{a,b,c\}^*$, on considère le langage L des mots qui contiennent le facteur ca.

1. Donner tous les mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2. Donner une expression rationnelle qui représente le langage L.

3. Ecrire un automate $\mathcal{A}(L)$ qui reconnaît le langage L. Déterminisez le au besoin.

4. Soit M le langage des mots qui ne contiennent pas le facteur ca. Déduire de $\mathcal{A}(L)$ un automate déterministe qui reconnaît le langage M.

3.2 Partie III

On considère la relation $\sim$ définie sur l'ensemble $\{a, b, c\}^*$ des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ définie par $u \sim v$ lorsque $u = v$ ou lorsqu'il existe deux mots g et d de $\{a, b, c\}^*$ tels que $u = gacd$ et $v = gcad$.

1. La relation $\sim$ est elle une relation d'ordre ? une relation d'équivalence ?

2. On définit la relation $\approx$ sur l'ensemble $\{a, b, c\}^*$ des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ $u \approx v$ lorsqu'il existe une suite finie de mots $u = u_0, u_1, ..., u_n = v$ telle que pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ on a $u_i \sim u_{i-1}$ ou $u_{i-1} \sim u_i$. Montrer que $\approx$ est une relation d'équivalence et que chaque classe d'équivalence a un unique représentant dans M.

3.3 Partie III

Soit K le langage des mots sur $\{a, b, c\}^*$ défini par induction de la manière suivante

- La base est définie par $B = \{\epsilon\}$
- Si u est un mot de K alors il en est de même pour ua,ub,ucb.

1. Montrer par induction que le langage K est inclus dans M. Est-ce que l'on a $K = L$?

2. Décrire les mots de K par leurs propriétés.

3. Montrer que la définition inductive de K est non ambigue et en déduire que le nombre K_n de mots de K de longueur n satisfait la récurrence $K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2}$

4. Compléter les conditions initiales de cette récurrence et exprimer alors K_n en fonction de n.