Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence Math-Info 2

Outils Formels pour l'Informatique | 2009–2010

TD n°7

Suites récurrentes

Exercice 1) La complexité $p(n)$ dans le pire des cas de l'algorithme du tri rapide (*quick-sort*) pour trier une liste de n nombres vérifie l'équation de récurrence ci-dessous. Résolvez-la, c'est-à-dire exprimez le terme général $p(n)$ de la suite $(p(n))_{n\geq 2}$ en fonction de n uniquement.

$$\begin{cases} p(2) = 3 \\ \forall n > 2,\ \ p(n) = p(n-1) + n + 1 \end{cases}$$

Exercice 2) Récurrence complète – Résoudre la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0,\ \ u_n = 3\sum_{k=0}^{n-1} u_k + 1$$

Exercice 3) Récurrence linéaire d'ordre 2 – On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ tels que les suites (maximales) de c consécutifs soient toujours de longueur paire. Ainsi, le mot $accbcccca$ est un mot de $\mathcal{M}$, mais le mot $accbccca$ n'est pas un mot de $\mathcal{M}$.

1. Trouvez tous les mots de $\mathcal{M}$ de longueur n inférieure ou égale à 3.
2. On considère la définition inductive suivante de l'ensemble $\mathcal{M}$:

   (B) $\varepsilon \in \mathcal{M}$

   (I) Pour tout $m \in \mathcal{M}$,
   $am \in \mathcal{M}$
   $bm \in \mathcal{M}$
   $ccm \in \mathcal{M}$

3. Cette définition inductive est-elle ambiguë ?
4. Trouvez une relation de récurrence caractérisant le nombre M_n des mots de longueur n appartenant à $\mathcal{M}$.
5. Résolvez l'équation de récurrence correspondante, c'est-à-dire exprimez M_n en fonction de n seulement.

Exercice 4) Résoudre la récurrence

- $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$
- Pour $n \geq 2$, $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$

Exercice 5) Résoudre la récurrence

- $u_0 = a$ et $u_1 = b$

- Pour $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n$

Exercice 6) Séries génératrices Déterminez les séries génératrices des suites suivantes:

1. $u_n = 3n - 1$.
2. $v_n = 3^n - 1$.

Exercice 7) Séries génératrices Déterminez la suite numérique (u_n) associée à la série génératrice $f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}$. Quelle est l'équation de récurrence satisfaite par (u_n)?