Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence Math-Info 2
Outils Formels pour l'Informatique | 2009–2010

TD n°4

Logique Propositionnelle

Exercice 1) Trouvez la table de vérité de $p \to (q \vee \neg r)$.

Exercice 2) Montrer que $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ est une tautologie.

Exercice 3) En utilisant les équivalences syntaxiques de De Morgan, donnez la négation des propositions suivantes (la barre horizontale traduit la négation) :

1. $(\bar{y} \wedge z) \vee (z \wedge x)$
2. $(y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge x) \vee (x \wedge z)$
3. $\left(y \wedge \overline{(x \vee y)}\right) \vee \left(\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge z}\right)$
4. $x \wedge \overline{\left(y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee \bar{y})}\right)}$

Exercice 4) Trouvez :

1. La contraposée de $p \to (q \vee r)$
2. La réciproque de $(p \wedge q) \to \neg r$
3. La contraposée de la réciproque de $p \to q$
4. La réciproque de la contraposée de $p \to q$.

Exercice 5) Exprimez la négation des phrases suivantes sans employer l'expression "il est faux que" ou "ce n'est pas vrai que" :

- "s'il pleut demain ou s'il fait froid, je ne sortirai pas".
- "le nombre 522 n'est pas divisible par 3, mais il est divisible par 7".
- "ce quadrilatère n'est ni un rectangle, ni un losange".
- "si Paul ne va pas travailler ce matin, il va perdre son emploi".
- "tout triangle équilatéral à ses angles égaux à 60°".

Exercice 6) Mettre sous forme normale disjonctive (resp. conjonctive), puis simplifier les fonctions booléennes suivantes

1. La loi de la majorité sur 3,4 et 5 variables. $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vaut 1 si et seulement si au moins la moité plus une des variables x_i valent 1.
2. La fonction f définie par $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vaut 1 si et seulement si le nombre $x_1 x_2 \ldots x_n$ codé en binaire est divisible par 3.

Exercice 7) Formaliser les assertions suivantes en utilisant les prédicats indiqués :

1. Personne n'est parfait (prédicat p(x) : x est parfait)
2. 0 est multiple de chaque entier (prédicat m(x,y) : x est multiple de y ; prédicat e(x) : x est un entier)
3. Les absents n'ont pas tous tort (prédicat a(x) : x est absent ; prédicat t(x) : x a tort)

Exercice 8) Soient les prédicats f(x) : x est un facteur; v(x) : x est un vélo ; p(x,y) : x possède y et e(x,y) : x égale y. Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x\,(v(x) \rightarrow (\exists z\, f(z) \wedge p(z,x)))$
2. $\forall x\, f(x) \rightarrow (\forall z\, \forall y\,(v(z) \wedge v(y) \wedge \neg e(z,y)) \rightarrow (\neg p(x,y) \vee \neg p(x,z)))$
3. $\exists x\, f(x) \wedge (\forall y\, v(y) \rightarrow \neg p(x,y))$

Exercice 9) Pour chaque formule, donner une interprétation qui la rend vraie et une qui la rend fausse :

1. $(\forall x)(\exists y)(p(x,y))$
2. $(\exists x)\, p(x) \rightarrow (\forall x)\, p(x)$
3. $(p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)$
4. $p(x) \rightarrow \neg p(x)$