

# UE3 - T1 : Signaux & Systèmes

Frédéric PAYAN

IUT Nice Côte d'Azur - Département R&T  
Université de Nice Sophia Antipolis

[fpayan@i3s.unice.fr](mailto:fpayan@i3s.unice.fr)

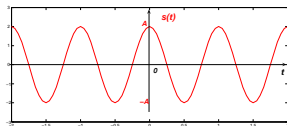
7 septembre 2011

# Plan du cours

- 1 **Chapitre 3 : Analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - **Introduction**
  - Représentation fréquentielle d'un cosinus
  - Représentation fréquentielle d'un signal périodique quelconque
  
- 2 **Chapitre 4 : Analyse fréquentielle des signaux non-périodiques**
  - Résumé sur l'analyse fréquentielle des signaux périodiques
  - Représentation fréquentielle d'un signal non périodique
  - Quelques propriétés

# Les signaux sinusoïdaux

- En Télécoms, les fonctions sinusoïdales sont très répandues.



- Deux paramètres sont alors essentiels :

## Remarque importante

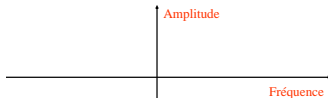
Pour faciliter sa représentation (temporelle), **on va représenter le cosinus dans un espace fréquentiel.**

# Plan du cours

- 1 **Chapitre 3 : Analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - Introduction
  - **Représentation fréquentielle d'un cosinus**
  - Représentation fréquentielle d'un signal périodique quelconque
  
- 2 **Chapitre 4 : Analyse fréquentielle des signaux non-périodiques**
  - Résumé sur l'analyse fréquentielle des signaux périodiques
  - Représentation fréquentielle d'un signal non périodique
  - Quelques propriétés

# Représentation fréquentielle d'un cosinus

- Espace fréquentiel :



- Pour le signal  $A.\cos(2\pi f_0 t)$ , cela donne :
- Les flèches représentent la fonction de Dirac (voir chapitre 2) notée  $\delta(\cdot)$ .

# Exemples

$$s_1(t) = 10. \cos(2\pi 100t) \Rightarrow$$

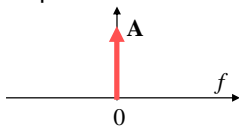
$$s_2(t) = 60. \cos(2\pi 200t) \Rightarrow$$

Et on peut les additionner !

$$\Rightarrow s(t) = 10. \cos(2\pi 100t) + 60. \cos(2\pi 200t) + 40. \cos(2\pi 400t)$$

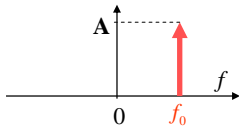
# La fonction de Dirac dans l'espace des fréquences

Représentation

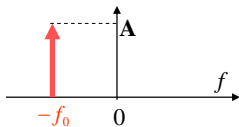


Equation

$\Leftrightarrow$



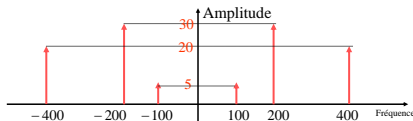
$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$

## Notion de spectre fréquentiel d'un signal

- Soit  $s(t) = 10 \cdot \cos(2\pi 100t) + 60 \cdot \cos(2\pi 200t) + 40 \cdot \cos(2\pi 400t)$
- Représentation fréquentielle :



=> **Equation fréquentielle (ou Spectre) :**

- Les fréquences négatives ( $-f$ ), n'ont aucune réalité physique. Elles ne sont qu'une conséquence de la relation mathématique "temps-fréquence".

# Plan du cours

- 1 Chapitre 3 : Analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - Introduction
  - Représentation fréquentielle d'un cosinus
  - Représentation fréquentielle d'un signal périodique quelconque
- 2 Chapitre 4 : Analyse fréquentielle des signaux non-périodiques**
  - Résumé sur l'analyse fréquentielle des signaux périodiques
  - Représentation fréquentielle d'un signal non périodique
  - Quelques propriétés

# Relation temps-fréquence pour un signal périodique quelconque

## Propriétés

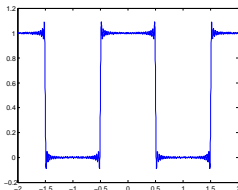
## Décomposition en série de Fourier (DSF)

## Un premier exemple

On pose  $f_0 = 2\text{Hz}$ ,  $A_0 = \frac{1}{2}$ ,  $A_1 = \frac{2}{\pi}$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = \frac{2}{3\pi}$ ,  $A_4 = 0$ ,  $A_5 = \frac{2}{5\pi}$ . On pose aussi que  $\phi_3 = \pi$  et que  $\phi_1 = \phi_4 = \phi_5 = 0$ .

En utilisant la formule précédente,

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi 3f_0 t + \pi) + \frac{2}{5\pi} \cos(2\pi 5f_0 t) + \dots$$

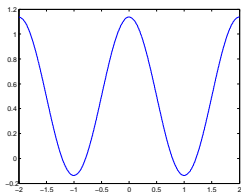


**=> On obtient finalement un signal périodique rectangulaire !**

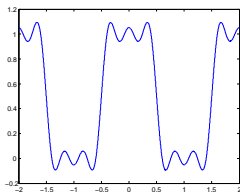
# Un premier exemple

exemple :

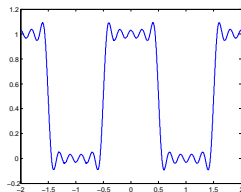
$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi 3f_0 t + \pi) + \frac{2}{5\pi} \cos(2\pi 5f_0 t) + \dots$$



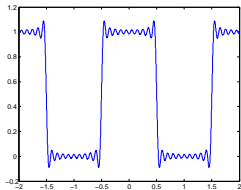
$k = 1$



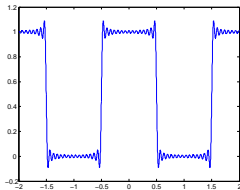
$k = 1 \rightarrow 5$



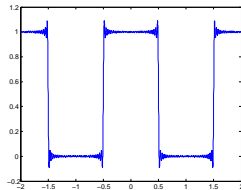
$k = 1 \rightarrow 10$



$k = 1 \rightarrow 20$



$k = 1 \rightarrow 30$



$k = 1 \rightarrow 60$

# Spectre fréquentiel d'un signal périodique quelconque

## Définition

**Le spectre fréquentiel d'un signal périodique est une somme de Dirac dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale  $f_0$  du signal concerné.**

## Ecriture mathématique

Le spectre fréquentiel d'un signal périodique s'écrit :

## Mais d'où viennent ces coefficients $C_k$ ?

- On a vu sur la diapositive 10 la DSF :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Mais cela peut s'écrire autrement !

### Décomposition en série de Fourier complexe

- Relations entre les 2 formules :

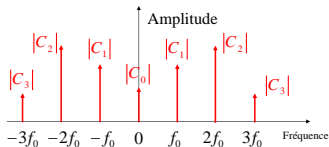
$$\forall n \neq 0, |C_n| = \frac{A_n}{2}, C_0 = A_0 \quad \text{et} \quad \arg C_n = \phi_n, \quad \text{et} \quad C_{-n} = C_n^*$$

# Représentation graphique d'un spectre fréquentiel

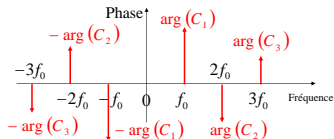
$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot \delta(f - k \cdot f_0)$$

- $C_k$  étant complexe, comment tracer ce spectre ?
- ⇒ **2 graphiques** sont nécessaires pour représenter un spectre :

**Spectre en amplitude**

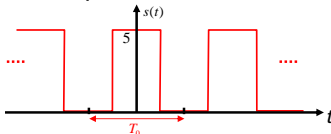


**Spectre en phase**



## Exemple

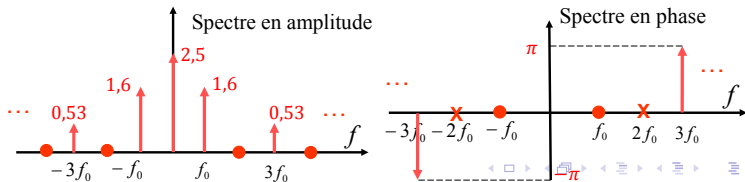
- Soit le signal créneau de période  $T_0$  :



- On peut montrer que :

$$C_k = \begin{cases} 2,5 & \text{pour } k = 0 \\ \frac{5}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases}$$

- Représentation graphique :

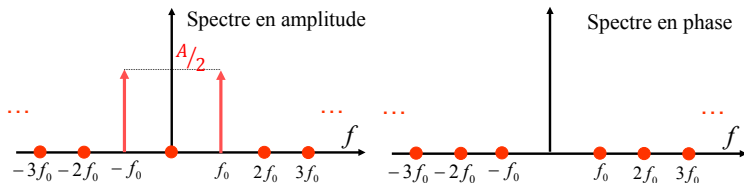


## Un autre exemple...

- Soit le signal défini par  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ .
- On peut montrer que :

$$C_k = \begin{cases} A/2 & \text{pour } k = \{-1, 1\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Représentation graphique :



# Propriétés importantes

## Définition

- ***Théorème du retard*** : soit le signal décalé  $s'(t) = s(t - \tau)$

$$C'_k = C_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 \tau}$$

$$\Rightarrow |C'_k| = |C_k| \quad \text{et} \quad \arg(C'_k) = \arg(C_k) - 2\pi k f_0 \tau$$

$\Rightarrow$  ***Ce retard ne modifie pas le spectre en amplitude.***

## Définition

- ***Théorème de Parseval*** :

$\Rightarrow$  ***Conservation de l'énergie entre temps et le fréquentiel.***

# Plan du cours

- 1 Chapitre 3 : Analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - Introduction
  - Représentation fréquentielle d'un cosinus
  - Représentation fréquentielle d'un signal périodique quelconque
  
- 2 Chapitre 4 : Analyse fréquentielle des signaux non-périodiques**
  - **Résumé sur l'analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - Représentation fréquentielle d'un signal non périodique
  - Quelques propriétés

# Représentation fréquentielle des signaux périodiques

## Définitions et propriétés

- Un **signal périodique**  $s(t)$  de fréquence fondamentale  $f_0$  est décomposable en une somme d' **harmoniques**.
- Harmoniques : sinusoides de fréquence  $kf_0$ .

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi kf_0 t + \phi_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{(2\pi jkf_0 t)}.$$

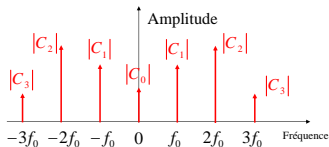
- Le **spectre fréquentiel** d'un signal périodique est donc une somme de Dirac dont les fréquences sont aussi multiples de  $f_0$ .

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot \delta(f - kf_0) \quad \text{avec} \quad C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \cdot e^{-2\pi jkf_0 t} dt.$$

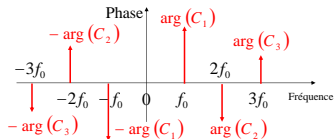
# Représentation graphique d'un spectre fréquentiel

- $C_k$  étant complexe, **2 graphiques** sont nécessaires pour représenter un spectre :

## Spectre en amplitude



## Spectre en phase

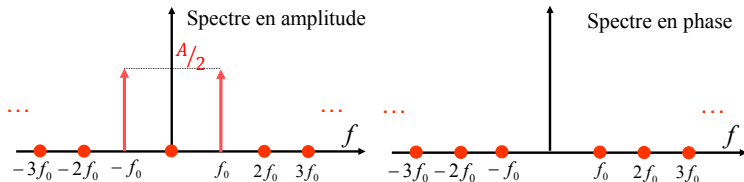


## Un premier exemple simple

- Soit le signal défini par  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ .
- On peut montrer que :

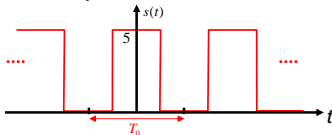
$$C_k = \begin{cases} A/2 & \text{pour } k = \{-1, 1\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Représentation graphique :



## Un deuxième exemple plus compliqué

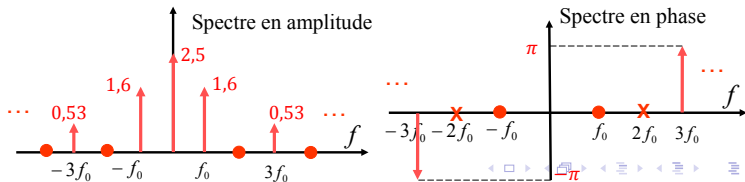
- Soit le signal créneau de période  $T_0$  :



- On peut montrer que :

$$C_k = \begin{cases} 2,5 & \text{pour } k = 0 \\ \frac{5}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases}$$

- Représentation graphique :



## Propriétés importantes

### Définition

- ***Théorème du retard*** : soit le signal décalé  $s'(t) = s(t - \tau)$

$$|C'_k| = |C_k| \quad \text{et} \quad \arg(C'_k) = \arg(C_k) - 2\pi k f_0 \tau$$

=> ***Un retard ne modifie pas le spectre en amplitude.***

### Définition

- ***Théorème de Parseval*** : la puissance d'un signal  $s(t)$  est la somme des puissances des harmoniques.

=> ***Conservation de l'énergie entre temps et le fréquentiel.***

# Plan du cours

- 1 Chapitre 3 : Analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - Introduction
  - Représentation fréquentielle d'un cosinus
  - Représentation fréquentielle d'un signal périodique quelconque
  
- 2 Chapitre 4 : Analyse fréquentielle des signaux non-périodiques**
  - Résumé sur l'analyse fréquentielle des signaux périodiques
  - **Représentation fréquentielle d'un signal non périodique**
  - Quelques propriétés

# Analyse Spectrale des signaux non périodiques

- Analyse des signaux périodiques  $\Rightarrow$  Décomposition en Série de Fourier (DSF)
- **Signaux non périodiques**  $\Rightarrow$  DSF impossible. Comment faire ?
- Signal non périodique  $\Leftrightarrow$  signal périodique avec une période  $T_0$  qui tend vers l'infini.
- Distance entre deux raies des spectres :  $1/T_0$  (Hz). Si  $T_0 \rightarrow \infty$ , la distance entre deux raies tend vers zéro !  
**Le spectre devient continue.**

$\Rightarrow$  la **Transformée de Fourier**.

# Transformée de Fourier

## Définition

- La *transformée de Fourier (TF)*  $S(f)$  d'un signal  $s(t)$  s'écrit :
  
- En télécoms, cette transformée représente le **spectre fréquentiel** d'un signal non périodique.

## Définition

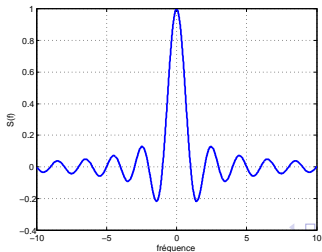
- Soit la transformée de Fourier  $S(f)$  d'un signal  $s(t)$ . On peut synthétiser le signal à l'aide de la transformée inverse :

## Exemples

- Soit le signal porte  $s(t) = \Pi(t)$ ,

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} dt = \int_{-1/2}^{+1/2} 1 \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} dt \\
 &= \frac{e^{-j \cdot 2\pi f / 2} - e^{j \cdot 2\pi f / 2}}{-j \cdot 2\pi f} = \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f}
 \end{aligned}$$

$$S(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f)$$



# Densités spectrales

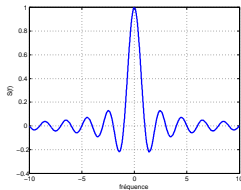
## Définition

*Soit le signal non-périodique  $s(t)$  et son spectre fréquentiel  $S(f)$ . On peut en déduire les graphiques suivants :*

- $|S(f)| \Rightarrow$  ;
- $\arg(S(f)) \Rightarrow$  ;
- $|S(f)|^2 \Rightarrow$  .

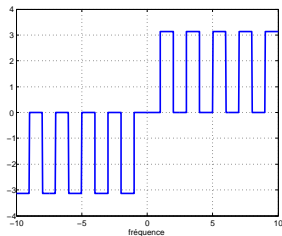
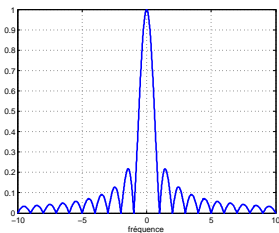
# Densités spectrales : exemples

- Soit le spectre fréquentiel du signal porte ( $s(t) = \Pi(t)$ ) :



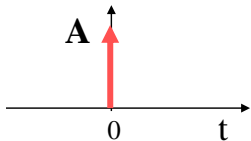
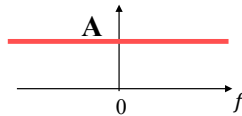
densité spectrale d'amplitude

densité spectrale de phase

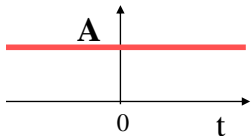
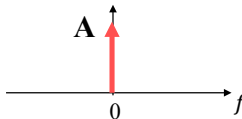


# Exemples

- Impulsion temporelle :


$$\begin{array}{c} TF \\ \rightleftarrows \\ TF^{-1} \end{array}$$


- Signal continu :

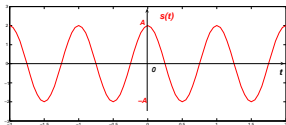

$$\begin{array}{c} TF \\ \rightleftarrows \\ TF^{-1} \end{array}$$


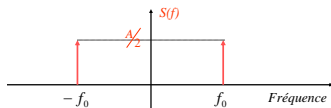
## Exemples

- Soit le signal cosinus  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ ,



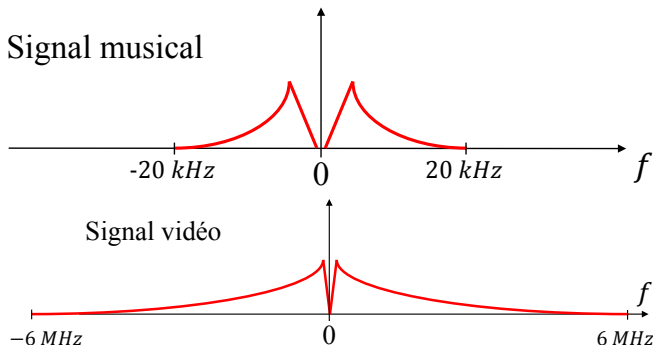
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_0 t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} dt = \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$



$$\begin{matrix} TF \\ \rightleftharpoons \\ TF^{-1} \end{matrix}$$


## Et les signaux aléatoires ?

- Le spectre fréquentiel d'un signal aléatoire ne peut pas être représenté de manière exacte.
- On ne peut respecter uniquement leur **bande de base**.



# Plan du cours

- 1 **Chapitre 3 : Analyse fréquentielle des signaux périodiques**
  - Introduction
  - Représentation fréquentielle d'un cosinus
  - Représentation fréquentielle d'un signal périodique quelconque
- 2 **Chapitre 4 : Analyse fréquentielle des signaux non-périodiques**
  - Résumé sur l'analyse fréquentielle des signaux périodiques
  - Représentation fréquentielle d'un signal non périodique
  - Quelques propriétés

# Propriétés de base

## Linéarité et décalage temporel

- **Linearité** :
- Décalage temporel (**théorème du retard**) :

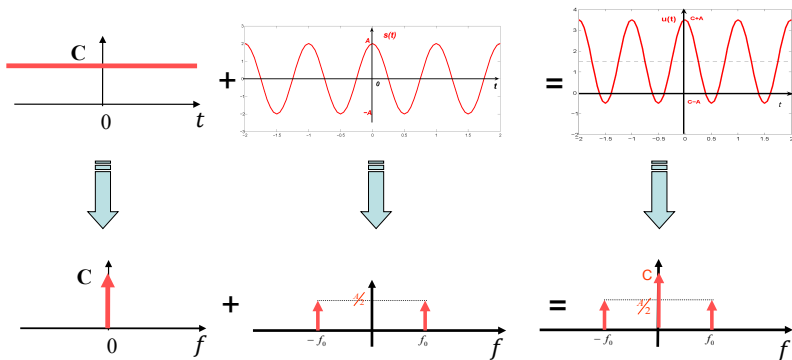
- Translation en fréquence :

$$s(t) \cdot e^{+j2\pi f_0 t} \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftharpoons}} S(f - f_0)$$

- Dérivée :  $s^{(n)}(t) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftharpoons}} (j2\pi f)^n \cdot S(f)$

## Exemple : linéarité

- Soit le signal  $u(t) = C + A.\cos(2\pi f_0 t)$ .



## Autre propriété très importante

### Théorème de la modulation d'amplitude

- Formule générale :

$$y(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \xrightleftharpoons[TF^{-1}]{TF} Y(f) = \frac{e^{j\theta}}{2} S(f - f_0) + \frac{e^{-j\theta}}{2} S(f + f_0)$$

- **Formule simplifiée :**

