UE3 - T1 : Signaux & Systèmes

Frédéric PAYAN

IUT Nice Côte d'Azur - Département R&T
Université de Nice Sophia Antipolis

fpayan@i3s.unice.fr

4 octobre 2011

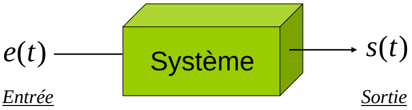
Plan du cours

Introduction

Définition

On appelle **système** S un processus physique qui associe un signal d'entrée $e(t)$ à un signal de sortie $s(t)$:

$$e(t) \xrightarrow{S} s(t).$$



Propriétés des systèmes

Soit un système S et deux signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$ tels que

- $e_1(t) \xrightarrow{S} s_1(t)$,
- $e_2(t) \xrightarrow{S} s_2(t)$.

Linéarité

Le système S est **linéaire (SL)** ssi

Propriétés des systèmes

Soit un système S, et un signal $e(t)$ tel que $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$.

Stationnarité

Le système S est **stationnaire** (ou invariant dans le temps (SIT)) ssi

Causalité

Le système S est **causal** si

Analyse d'un système

Définition

-

L'analyse des systèmes se fait de deux façons différentes :

1.
2.

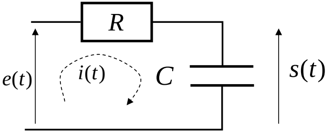
Remarque : On ne considèrera que des **systèmes linéaires, invariants dans le temps (SLIT), et causaux**.

Plan du cours

Mise en équation d'un système

- D'une manière générale, **tout système linéaire peut être décrit**

- Exemple : le **circuit RC**.



$$\Leftrightarrow s(t) + RC\frac{ds(t)}{dt} = e(t)$$

=> Dans ce cas, on cherchera à résoudre l'équation différentielle.

Mise en équation d'un système

On trouvera la solution générale sous la forme

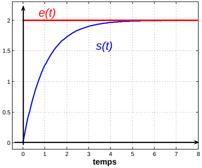
$$s(t) = s_g(t) + s_p(t),$$

avec :

1.
2.

Exemple précédent :

$$\Rightarrow s(t) = (E - E.e^{-\frac{t}{RC}})$$

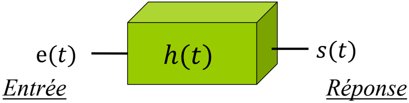


Relation entrée/sortie d'un système

Définition

Soit un signal d'entrée $e(t)$. La sortie d'un SLIT est donnée par :

- $h(t)$ est la ;
- le terme $*$ est un **produit de convolution** (voir plus loin).

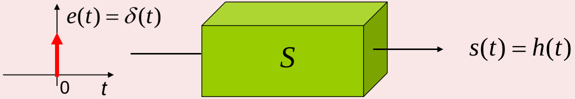


Réponse impulsionnelle

Définition

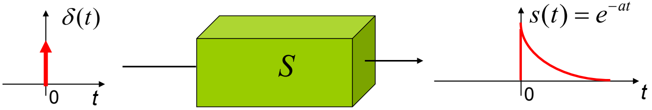
La **réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un SLIT est le signal de sortie fourni par le système lorsque l'entrée est une impulsion temporelle** :

$$\boxed{e(t) = \delta(t) \overset{S}{\rightarrow} s(t) = h(t)}.$$



Réponse impulsionnelle

- Exemple : Soit un système S dont la réponse impulsionnelle est inconnue.



On peut donc déduire facilement :

$$h(t) = e^{(-at)}$$

=> **Si on connait $h(t)$, on connait la modélisation du système :**

$$s(t) = h(t) * e(t).$$

Le produit de convolution

Définition

On appelle convolution de $x_1(t)$ par $x_2(t)$ le signal $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ défini par :

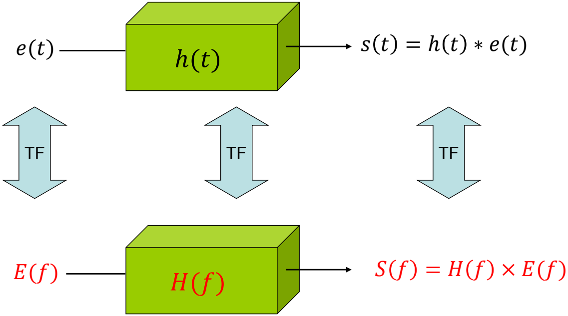
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau \quad (1)$$

Propriétés :

- Commutation : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$;
- $x_1(t) * \delta(t) = x_1(t)$;
- $x_1(t) * \delta(t - t_0) = x_1(t - t_0)$ (idem dans l'espace des fréquences).

Plan du cours

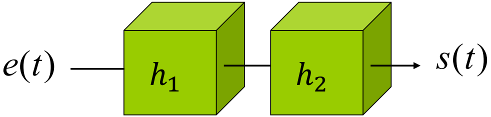
Réponse fréquentielle d'un système



définition

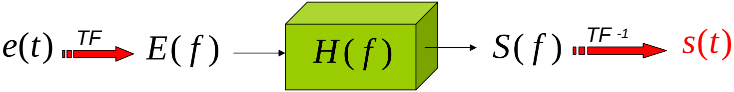
Analyse fréquentielle d'un système

- Avantage de l'analyse fréquentielle : systèmes en série.



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftharpoons}} H(f) = H_1(f) \times H_2(f).$$

- L'**analyse des systèmes linéaires** se fait souvent **dans le domaine des fréquences** selon la démarche suivante :



Conclusion sur l'analyse des systèmes

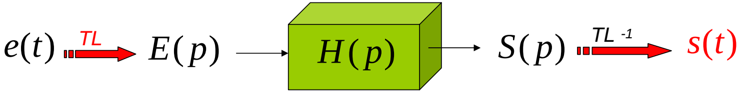
Résumé

Un système S est complètement défini si on connait :

Plan du cours

Motivations

- La méthode d'analyse basée sur la transformée de fourier (TF) ne marche pas toujours (TF divergente).
- Alternative à la TF : **la Transformée de Laplace (TL)**



1.
2.
3.

La transformée de Laplace

Définition

Soit le signal causal $s(t)$ (nul pour $t \leq 0$). La ***transformée de Laplace (TL) permet la relation***

$$s(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} S(p),$$

avec

- *p une variable complexe définie par* $p = \sigma + j2\pi f$,
- *$S(p)$ définie par L est donnée par*

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{(-pt)}dt.$$

- Remarque : **relation Fourier-Laplace** : sous certaines conditions (toujours vérifiées dans ce cours)

$$X(f) = X(p)|_{p=j2\pi f} \qquad X(p) = X(f)|_{f=p/j2\pi} \qquad (2)$$

Plan du cours

Raison 1 : Les transformées de Laplace usuelles

$s(t)$	$S(p)$	Domaine
$\delta(t)$	1	$\mathbb{R}$
$e^{-at}.u(t)$	1/(p+a)	$]-a,+\infty[$
$t^n.u(t)$	$n!/p^{n+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$t^n.e^{-at}.u(t)$	$n!/(p+a)^{n+1}$	$]-a,+\infty[$
$sin(\omega t).u(t)$	$\omega/(p^2+\omega^2)$	$\mathbb{R}^{+*}$
$cos(\omega t).u(t)$	$p/(p^2+\omega^2)$	$\mathbb{R}^{+*}$
$e^{-at}.sin(\omega t).u(t)$	$\omega/\left((p+a)^2+\omega^2\right)$	$\mathbb{R}^{+*}$
$e^{-at}.cos(\omega t).u(t)$	$(p+a)/\left((p+a)^2+\omega^2\right)$	$\mathbb{R}^{+*}$

Raison 2 : Les propriétés de la TL

- **Convolution** :

- **Résolution simples des équations différentielles** :
  - **Théorème de la dérivation** :

    avec $x(t=0)$ et $x'(t=0)$ respectivement la valeur instantanée de $x(t)$ et de sa dérivée à l'instant $t=0$.

Raison 3 : la transformée de Laplace inverse

- Soit le signal $x(t)$ et $X(p)$ sa TL définie par une fraction rationnelle

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

  - Les valeurs qui annulent $N(p)$: les
  - Les valeurs qui annulent $D(p)$: les

Très important

Si $deg(N(p)) \leq deg(D(p))$, **La TL inverse s'obtient en 2 étapes** :

La transformée de Laplace inverse

Exemple :

Soit le signal $x(t)$ dont la TL est définie par

$$X(p) = \frac{3p+4}{p^2+2p}.$$

Avec une décomposition en éléments simples :

$$\frac{3p+4}{p^2+2p} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{p}.$$

Or,

$$\frac{1}{p+2} \overset{TL^{-1}}{\rightarrow} e^{-2t}.u(t),\ et\ \frac{2}{p} \overset{TL^{-1}}{\rightarrow} 2.t^0.u(t).$$

Donc,

$$x(t) = \left(e^{-2t}+2\right).u(t).$$

Plan du cours

Schéma type d'une étude d'un système

Soit un certain système S **à étudier. Pour connaître son comportement** , il faut :

1. **déterminer l'équation différentielle** décrivant S.
2. => obtention d'une fraction polynomiale reliant $S(p)$ et $E(p)$;
3.
4.

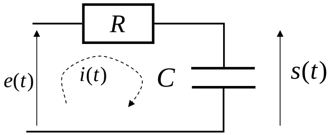
Schéma type d'une étude d'un système (II)

Ensuite, il suffit d'appliquer en entrée des signaux pour en étudier la sortie :

1. **impulsion temporelle** $\delta(t)$ =>
   - représente la modélisation mathématique du système ;
   - permet de connaître la **stabilité** du système étudié.
2. **échelon** $u(t)$ =>
   - capacité du système à réagir à une variation brusque ;
   - étude du **régime transitoire**.
3. **signal sinusoïdal** =>
   - permet de décrire le comportement en fréquence du système ;
   - **diagrammes de Bode (amplitude et phase)**.

Plan du cours

Etude du circuit RC



1. Ce filtre est défini par l'équation $RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$.
2. Théorème de la dérivation

$$\Rightarrow S(p) = \frac{E(p)}{1+RCp} + \frac{RC.s(0^+)}{1+RCp}$$

3. Réponse impulsionnelle : $e(t) = \delta(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} E(p) = 1$.

   Si le condensateur est déchargé : $s(0^+) = 0$

$$S(p) = \frac{1}{1+RCp} \overset{TL^{-1}}{\rightarrow} s(t) = \boxed{\frac{1}{RC}.e^{(-\frac{t}{RC})}.u(t) = h(t)}.$$

4. Idem pour la réponse indicielle, harmonique...

Plan du cours

Propriétés

On pose $x(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} X(p)$ et $y(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} Y(p)$.

- **Linéarité :**

$$a.x(t) + b.y(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} a.X(p) + b.Y(p)$$

- **Changement d'échelle** : $x(at) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{a}X(p/a)$
- **Translation temporelle** : si $T_0 \geq 0$, $x(t - T_0) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftharpoons}} X(p).e^{-pT_0}$