Télécommunications (UE3)
T1 - Signaux & Systèmes

Frédéric PAYAN

IUT de Nice Côte d'Azur - Département R&T

fpayan@i3s.unice.fr

29 octobre 2008

Plan du cours

Motivations

- Nous allons étudier les **caractéristiques des principaux systèmes élémentaires** :
  1. le filtre gain ;
  2. le filtre dérivateur ;
  3. le filtre intégrateur ;
  4. le filtre premier ordre ;
  5. le filtre second ordre.

- Caractéristiques étudiées :
  1. sa fonction de transfert ;
  2. sa réponse impulsionnelle ;
  3. sa réponse indicielle ;
  4. sa réponse harmonique (diagrammes de Bode) :

$$log(\omega) \rightarrow |H(\omega)|_{dB} = 20log(|H(\omega|) \quad (en\ dB)$$

$$log(\omega) \rightarrow arg\ H(\omega) \quad (en\ radians)$$

Plan du cours

Gain K

Fonction de transfert

$$s(t) = K.e(t), \quad H(p) = K, \quad H(\omega) = K$$

- Réponses impulsionnelle et indicielle : évident.

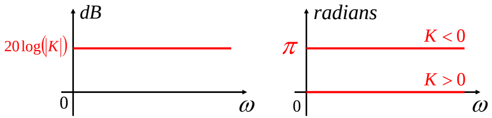
Réponse harmonique

- Gain :

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log(K)$$

- Phase :

$$arg\ H(\omega) = 0\ si\ K > 0, = \pi\ si\ K < 0$$



Plan du cours

Dérivateur

Fonction de transfert

$$s(t) = \frac{de(t)}{dt}, \quad H(p) = p, \quad H(\omega) = j\omega$$

- Réponse indicielle

$$\Rightarrow S(p) = p \times \frac{1}{p} = 1.$$

$$\Rightarrow s(t) = \delta(t)$$

- Réponse rampe ($e(t) = t.u(t)$) :

$$\Rightarrow S(p) = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\Rightarrow s(t) = u(t)$$

Dérivateur (suite)

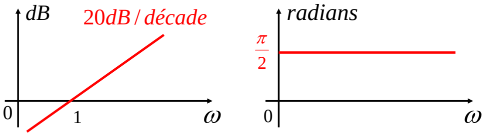
Réponse harmonique

- Gain :

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log(\omega)$$

- Phase :

$$arg\ H(\omega) = \frac{\pi}{2}$$



Evaluation de la pente :

- Décade (intervalle $(\omega,\ 10\omega)$) : $|H(10\omega)|_{dB} = |H(\omega)|_{dB} + 20dB$
- Octave (intervalle $(\omega,\ 2\omega)$) : $|H(2\omega)|_{dB} = |H(\omega)|_{dB} + 6dB$

Plan du cours

Intégrateur

Fonction de transfert

$$\frac{ds(t)}{dt} = e(t), \quad H(p) = \frac{1}{p}, \quad H(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

- Réponse impulsionnelle :

$$S(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow s(t) = u(t)$$

- Réponse indicielle :

$$S(p) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} \Rightarrow s(t) = t.u(t)$$

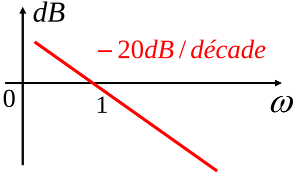
- Réponse rampe :

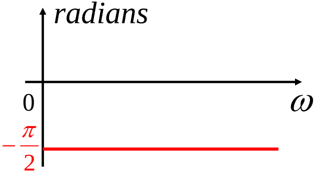
$$S(p) = \frac{1}{p^3} \Rightarrow s(t) = \frac{t^2}{2}.u(t)$$

Intégrateur (suite)

Réponse harmonique

- Gain : $|H(\omega)|_{dB} = -20log(\omega)$.
- Phase : $arg\ H(\omega) = -\frac{\pi}{2}$





Evaluation de la pente : $-20dB/decade$ (ou $-6dB/octave$).

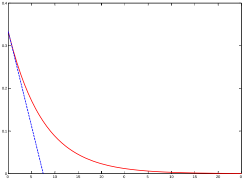
Plan du cours

Système du premier ordre

Fonction de transfert

$$\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t), \quad H(p) = \frac{1}{1+\tau p}, \quad H(\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$$

- Réponse impulsionnelle : $\Rightarrow s(t) = \frac{1}{\tau} exp^{(-t/\tau)} u(t)$

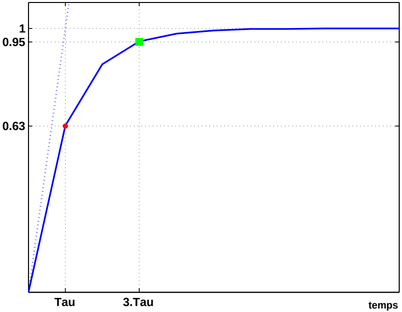


Remarque : $s(0) = 1/\tau$, $s(\tau) = 1/e\tau$, et tangente en 0 de pente $-1/\tau^2$.

Système du premier ordre (suite)

- Réponse indicielle :

$$S(p) = \frac{1}{p.(1+\tau p)} \Rightarrow s(t) = (1 - exp^{(-t/\tau)})u(t)$$



Remarque : τ traduit la rapidité du régime transitoire.

Système du premier ordre

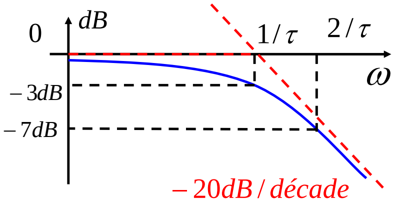
Réponse harmonique

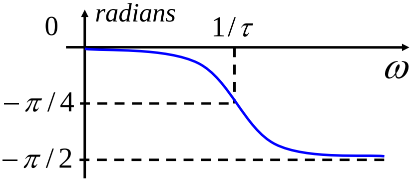
- Gain :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

- Phase :

$$arg\ H(\omega) = -arctan(\tau\omega)$$





Système du premier ordre

Quelques termes :

- **Pulsation de cassure** :
  intersection des asymptotes (en zéro et à l'infini).
- Pulsation de coupure à $3dB$ (ω_c) :
  - $$|H(\omega_c)| = 0.7|H(0)|)$$
  - $$|H(\omega_c)|_{dB} = |H(0)|_{dB} - 3dB$$

Pour un système de 1er ordre, la fréquence de coupure est égale à la fréquence de cassure.

Plan du cours

Système du second ordre

Fonction de transfert

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_n}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_n}p+\frac{p^2}{\omega_n^2}} \text{ ou } H(\omega)=\frac{1}{1+j\frac{2z}{\omega_n}\omega-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Avec :

- ω_n : pulsation naturelle (en rad/sec).
- $z > 0$: **facteur d'amortissement.**

Selon la valeur de z, le comportement du 2nd ordre sera différent :

1. $0 < z < 0.7$: système oscillant et résonant ;
2. $0.7 < z < 1$: système oscillant et non-résonant ;
3. $z > 1$: système hyper-amorti ;

Système du second ordre (suite)

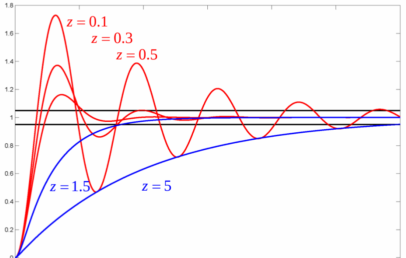
- Réponse indicielle avec $0 < z < 1$ (système oscillant) :

$H(p)$ a 2 pôles complexes conjugués $p_{1,2} = -z\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{-z^2+1}$.

$$s(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\exp\left(-z\omega_n t\right)\sin\left(\omega_p t - \varphi\right)\right)u(t),$$

avec ω_p la pulsation propre

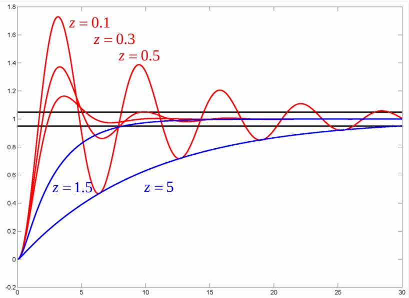
$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-z^2},\ et\ \varphi = arctan\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$$



Système du second ordre (suite)

- Réponse indicielle avec $z > 1$: système hyper-amorti

  $H(p)$ a 2 pôles réel négatifs => produit de 2 syst. du premier ordre.

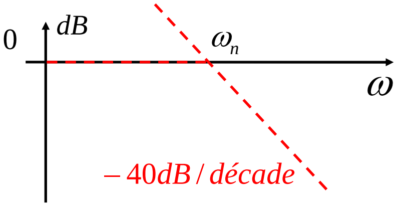


Système du second ordre (suite)

Réponse harmonique

- Gain :

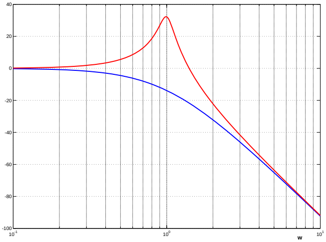
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (\frac{2z\omega}{\omega_n})^2}}$$



La pulsation de cassure ω_n n'est pas la pulsation de coupure ω_c .

Système du second ordre (suite)

- Diagramme de Gain réel :



- Si $z < 0.7$, $|H(\omega)|$ passe par un maximum lorsque $\omega = \omega_r$ (appelée **pulsation de résonance**), définie par

$$\omega_r = \omega_n.\sqrt{1 - 2z^2}.$$

- A la pulsation ω_r, on définit le **facteur de résonance** Q, défini par

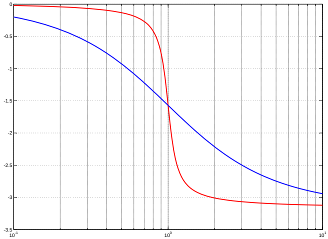
$$Q = \frac{|H(\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}}.$$

Système du second ordre (suite)

Réponse harmonique

- Phase :

$$arg\ H(\omega) = -arctan(\frac{2z\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2})$$



- Asymptote en 0 de pente égale à $-2z/\omega_n$.
- le point $(\omega_n, -\pi/2\ rad)$ est un point d'inflexion et le centre de symétrie de la courbe.