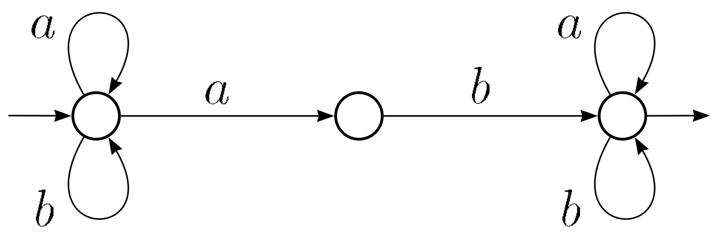
Revêtements d'automates: une théorie opératoire

1$^{\text{ère}}$ journée

M est un monoïde.

Automate sur M = *graphe étiqueté* par les éléments de M, avec deux ensembles d'états distingués:

$$\mathcal{A} = \langle Q, M, E, I, T \rangle \ .$$



$$|\mathcal{A}| = \{ m \in M \mid \exists\ p \in I, q \in T \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{m} q \} \ .$$

Une partie d'un monoïde M est rationnelle si, et seulement si, elle est acceptée par un automate fini sur M.

Action de M sur $S = \delta\colon S \times M \to S$, notée $s \cdot m$, avec

$$s \cdot 1_M = s \qquad \text{et} \qquad (s \cdot m) \cdot m' = s \cdot m\, m' \quad .$$

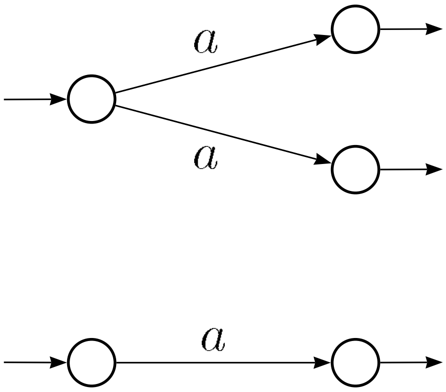
$$P \text{ \textit{reconnu} par } \delta \quad \Longleftrightarrow \quad P = \{ m \in M \mid s_0 \cdot m \in R \}.$$

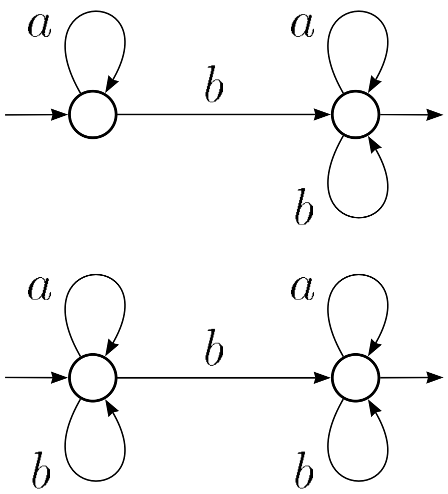
Reconnaissable = reconnu par une action sur un ensemble *fini*

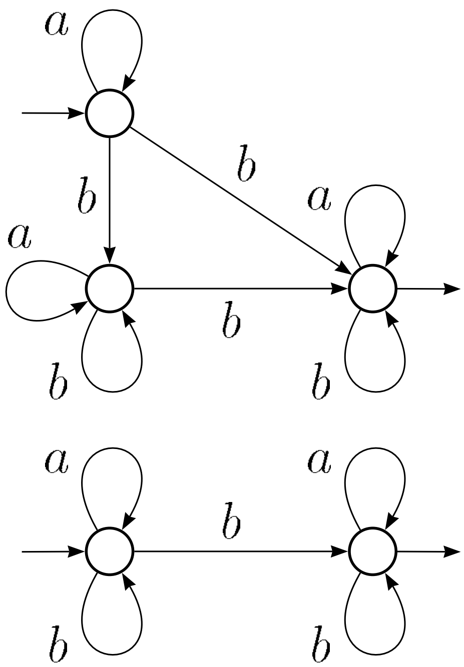
G, ensemble générateur de M. Alors $\mathcal{D}'_\delta = \langle\, S, M, F, s_0, R \,\rangle$ avec $F = \{ (s, g, s \cdot g) \mid s \in S\,,\ g \in G \}$ accepte P reconnu par δ (et par R).

Toute partie reconnaissable d'un monoïde finiment engendré est rationnelle.

Morphismes d'automates







Morphismes d'automates (2)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{B} = \langle \arrow[d, "\varphi"'] & R, \arrow[d] & M, & F, \arrow[d] & J, & U \rangle \\
\mathcal{A} = \langle & Q, & M, & E, & I, & T \rangle
\end{tikzcd}
$$

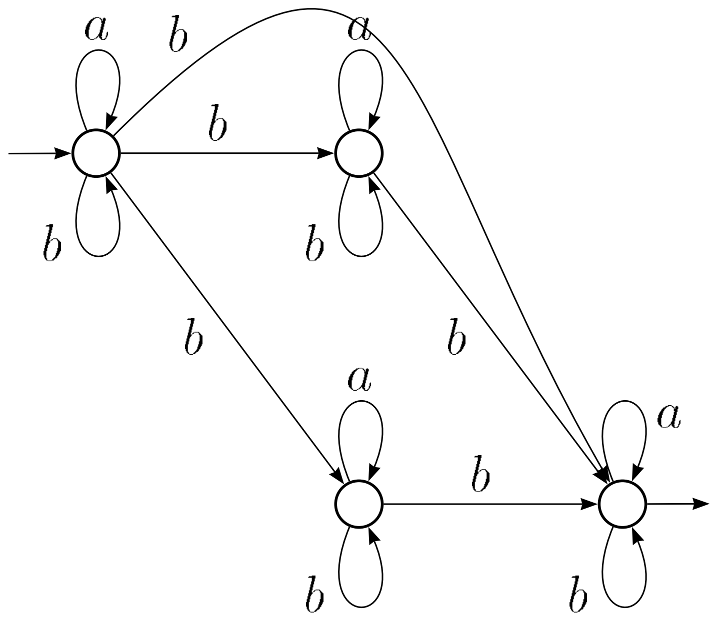
$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[d, "\varphi"] \\
E \arrow[r, "\iota"'] & Q
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[d, "\varphi"] \\
E \arrow[r, "\tau"'] & Q
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
E \arrow[r, "\varepsilon"'] & M
\end{tikzcd}
$$

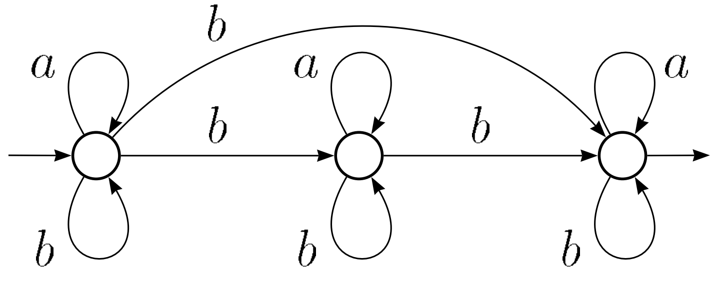
$$J\varphi \subseteq I \quad \text{et} \quad U\varphi \subseteq T \quad .$$

$$\boxed{\textit{Si } \varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A} \textit{ est un morphisme, alors } |\mathcal{B}| \subseteq |\mathcal{A}|.}$$

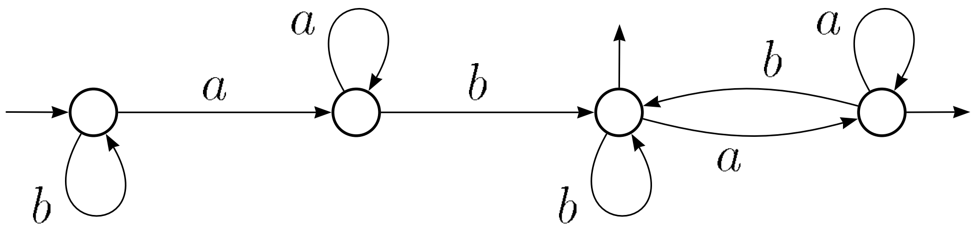
Si $\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *et* $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *sont des morphismes,*
$\psi \circ \varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *est également un morphisme.*

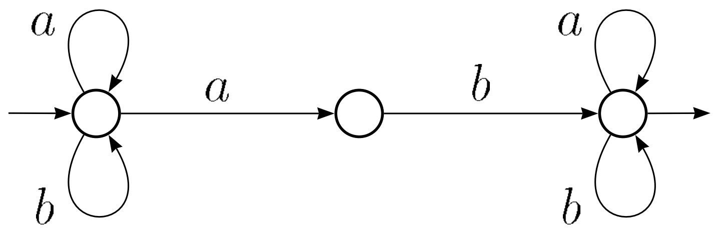
Morphismes d'automates (3)

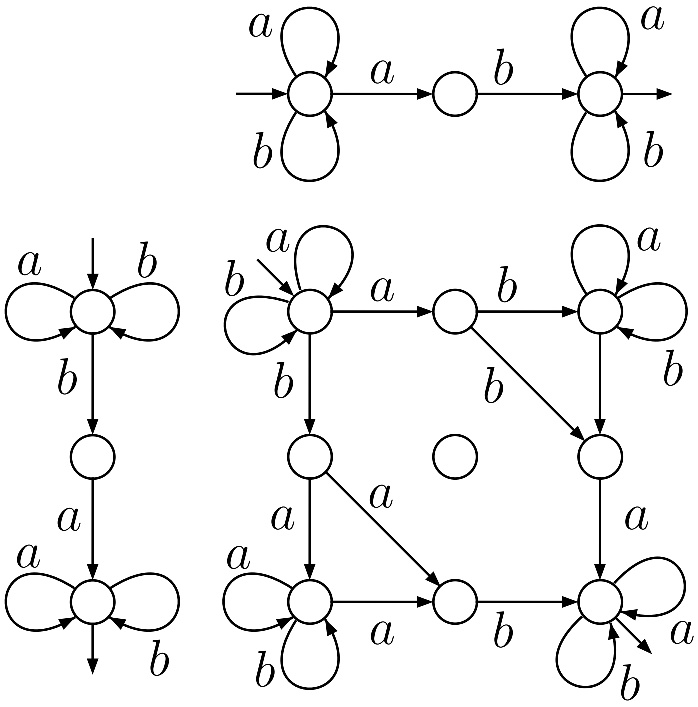


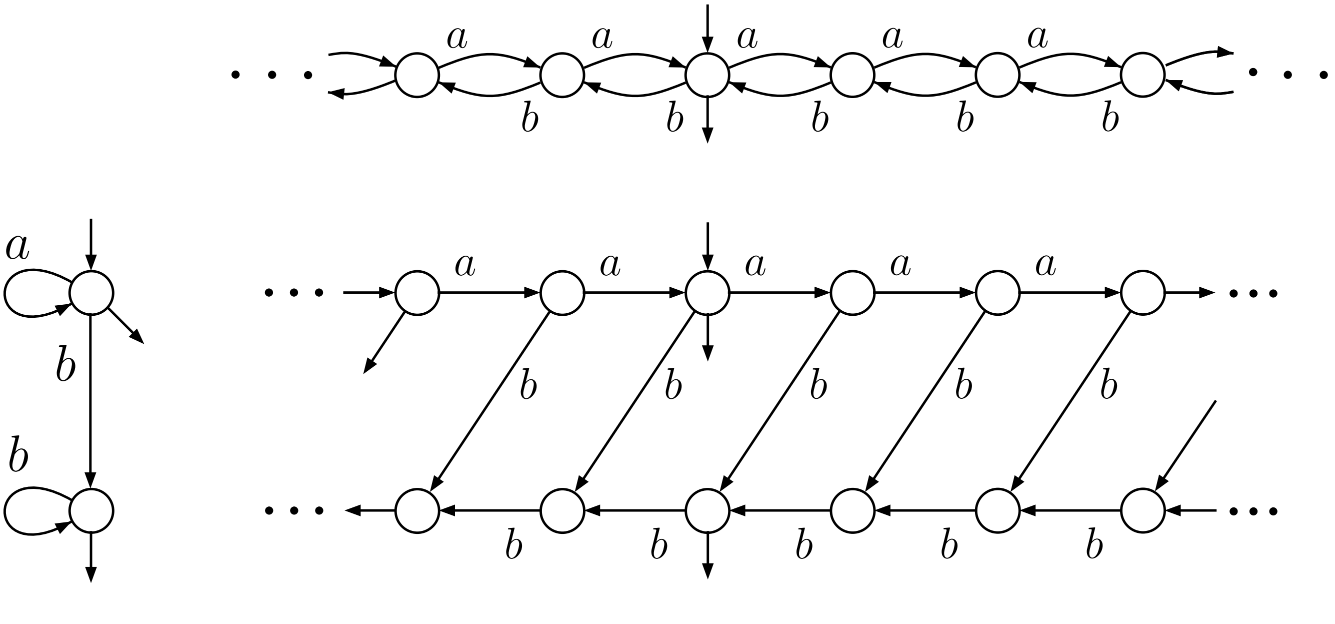


Morphismes d'automates (4)









Produits d'automates sur A^*.

$$\mathrm{Out}_{\mathcal{A}}(q) = \{e \in E \mid e\iota = q\} \qquad \mathrm{Out}_{\mathcal{B}}(r) = \{f \in F \mid f\iota = r\}$$

$$\varphi\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{morphisme}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi\colon \mathrm{Out}_{\mathcal{B}}(r) \longrightarrow \mathrm{Out}_{\mathcal{A}}(r\varphi) \quad \text{application}$$

$$\varphi \qquad \text{localement} \qquad \begin{cases} \text{injectif} \\ \text{surjectif} \\ \text{bijectif} \end{cases}$$

$$\mathrm{In}_{\mathcal{A}}(q) = \{e \in E \mid e\tau = q\} \qquad \mathrm{In}_{\mathcal{B}}(r) = \{f \in F \mid f\tau = r\}$$

$$\varphi\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{morphisme}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi\colon \mathrm{In}_{\mathcal{B}}(r) \longrightarrow \mathrm{In}_{\mathcal{A}}(r\varphi) \quad \text{application}$$

$$\varphi \qquad \text{localement} \qquad \begin{cases} \text{co-injectif} \\ \text{co-surjectif} \\ \text{co-bijectif} \end{cases}$$

Déf. 1 .— $\varphi\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ $\boxed{\text{revêtement}}$ *si*

i) φ *est* localement bijective*;*

ii) $\forall i \in I\,,\ \exists !\, j \in J \qquad j\varphi = i;$

iii) $\forall t \in T \qquad t\varphi^{-1} \subset U \qquad (i.e.\ T\varphi^{-1} = U).$

Déf. 2 .— $\varphi\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ $\boxed{\text{co-revêtement}}$ *si*

i) φ *est* localement co-bijective*;*

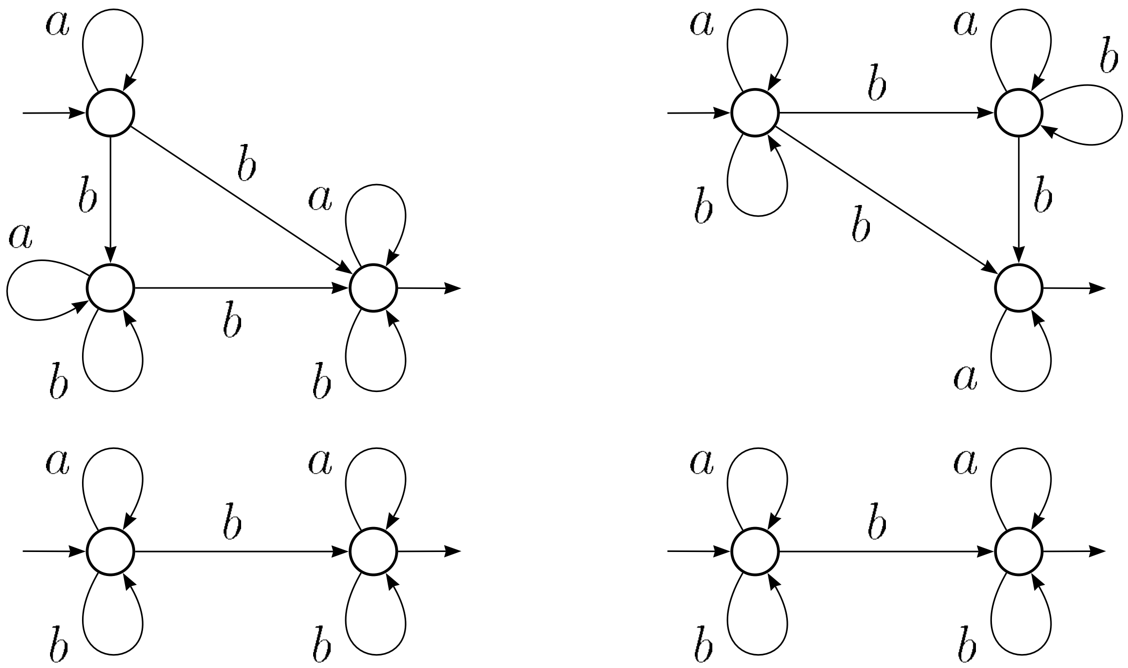
ii) $\forall i \in I \qquad i\varphi^{-1} \subset J \qquad (i.e.\ I\varphi^{-1} = J);$

iii) $\forall t \in T\,,\ \exists !\, s \in S \qquad s\varphi = t.$

Un revêtement (resp. un co-revêtement) $\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *induit une bijection entre les calculs réussis de* $\mathcal{A}$ *et ceux de* $\mathcal{B}$.

Si $\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *est un (co)-revêtement, alors* $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$.

Revêtements et co-revêtements (2)



$$\mathcal{A} = \langle\, Q, M, E, I, T \,\rangle \qquad\qquad P = |\mathcal{A}|$$

$$\delta, \text{ action de } M \text{ sur } S \qquad\qquad R = \{ m \mid s_0 \cdot m \in K \}$$

$$\mathcal{B}\,' = \langle\, Q \times S, M, F, I \times \{s_0\}, T \times S \,\rangle$$

$$F = \{ ((p,s), m, (q, s \cdot m)) \mid s \in S\,,\ (p,m,q) \in E \}$$

$$\mathcal{B}\ = \langle\, Q \times S, M, F, I \times \{s_0\}, T \times K \,\rangle$$

$$|\mathcal{B}| = \{ m \mid m \in |\mathcal{B}'| \text{ et } s_0 \cdot m \in K \} = P \cap R$$

L'intersection d'une partie rationnelle et d'une partie reconnaissable est rationnelle.

Le résultat

Th. 1 [Eilenberg – Schützenberger] .—
Une relation rationnelle de $A^* \times B^*$ *qui conserve la longueur est une partie rationnelle de* $(A \times B)^*$

$$R \in \mathrm{Rat}\, A^* \times B^* \ , \quad R \subset (A \times B)^* \quad \Longrightarrow \quad R \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^*$$

Une relation rationnelle qui conserve la longueur *peut être réalisée* par un automate lettre-à-lettre.

Le résultat (plus élaboré)

$$u \in A^* \times B^* \quad \Longrightarrow \qquad \text{factorisation } \textit{unique} \quad u = u' \, u'' \, ,$$

$$u' \in (A \times B)^* \, , \quad u'' \in (A^* \times 1_{B^*}) \cup (1_{A^*} \times B^*)$$

Saillie de $u = (f, g) \quad = \quad \sigma(u) = ||f| - |g||$

Saillie de $R \subset A^* \times B^* \quad = \quad \sup\{\sigma(u) \mid u \in R\}$

$$\mathrm{Diff}_k \;= (A^{\leq k} \times 1_{B^*}) \cup (1_{A^*} \times B^{\leq k})$$

Th. 2 .— *Une relation rationnelle de* $A^* \times B^*$ *à saillie bornée par* k *est une union finie de produits de parties rationnelles de* $(A \times B)^*$ *par des sous-ensembles de* Diff_k.

La preuve classique

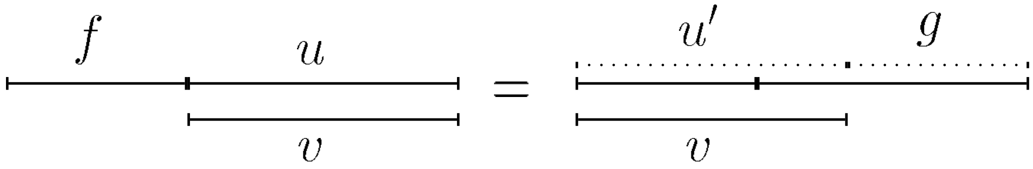
Lem. 1 [Lemme de resynchronisation] .—

$\forall T \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^*\ ,\ \forall f \in A^*\ ,$
$\exists\,\{T_g \mid g \in A^{|f|}\}\ ,\ T_g \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^*$

$$(f, 1_{B^*})\,T = \bigcup_{g \in A^{|f|}} T_g\,(g, 1) \quad .$$

Démonstration. k, entier fixé.

$$\forall f \in A^k\ ,\ \forall t = (u, v) \in (A \times B)^*$$
$$(f, 1_{B^*})\,(u, v) = (u', v)\,(g, 1_{B^*})$$



$$\forall T \subset (A \times B)^* \qquad \exists \widetilde{T} \in \left(\mathfrak{P}((A \times B)^*)\right)^{A^k \times A^k}$$
$$\forall f \in A^k \qquad (f, 1_{B^*})\,T = \sum_{g \in A^k} \widetilde{T}_{f,g}(g, 1_{B^*})$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(T+S)} &= \widetilde{T} + \widetilde{S} \\
\widetilde{(T\,S)} &= \widetilde{T}\,\widetilde{S} \\
\widetilde{(T^*)} &= (\widetilde{T})^*
\end{aligned}
$$

$\mathcal{C}$, classe des sous-ensembles T de $(A{\times}B)^*$ tels que les coefficients de $\widetilde{T}$ sont dans $\mathrm{Rat}\,(A\times B)^*$.

$\mathcal{C}$ contient les singletons.
$\mathcal{C}$ est fermée par union, produit et étoile.
$\mathcal{C}$ contient $\mathrm{Rat}\,(A\times B)^*$.

$$
\begin{aligned}
(f, 1_{B^*})\, T\, S = [(f, 1_{B^*})\, T]\ S = \left[\sum_{g \in A^k} \widetilde{T}_{f,g}\, (g, 1_{B^*})\right]\ S \\
= \sum_{g \in A^k} \left(\widetilde{T}_{f,g}\, (g, 1_{B^*})\, S\right) \\
= \sum_{g \in A^k} \left(\widetilde{T}_{f,g} \sum_{h \in A^k} \widetilde{S}_{g,h}\, (h, 1_{B^*})\right) \\
= \sum_{g,h \in A^k} \left(\widetilde{T}_{f,g}\, \widetilde{S}_{g,h}\, (h, 1_{B^*})\right) \\
= \sum_{h \in A^k} \left(\sum_{g \in A^k} \widetilde{T}_{f,g}\, \widetilde{S}_{g,h}\right)\ (h, 1_{B^*}) \\
= \sum_{h \in A^k} \left(\widetilde{T}\, \widetilde{S}\right)_{f,h}\ (h, 1_{B^*})
\end{aligned}
$$

Dém. du Th. 2.

Récurrence sur la hauteur d'étoile de $R \in \mathrm{Rat}\, A^* \times B^*$.

Si R est de hauteur 0,

$$R = \bigcup_{\mathit{finie}} u\,, \quad \sigma(u) \leq k \;\;,$$

$$u = u'\, u''\,, \quad u' \in (A \times B)^*\;, \quad u'' \in (A^* \times 1_{B^*}) \cup (1_{A^*} \times B^*)$$

Si R est de hauteur $h+1$,

$$R = \bigcup_{\mathit{finie}} P$$

$$P = u_0\, R_1^*\, u_1\, R_2^*\, u_2 \cdots u_{r-1}\, R_r^*\, u_r$$

$$u_i \in A^* \times B^*\;, \quad R_i \in \mathrm{Rat}\, A^* \times B^*\;, \quad \mathrm{h}(R) \leq h$$

$$\begin{array}{rcl}
R_i \notin \mathrm{Rat}\,(A \times B)^* & \Longrightarrow & R_i^* \quad \text{saillie non bornée,} \\
 & \Longrightarrow & R \quad \text{saillie non bornée.} \\
\text{Donc } R_i \in (A \times B)^* & \Longrightarrow & R_i \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^* \\
 & \Longrightarrow & R_i^* \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^*
\end{array}$$

Lemme 1 $\quad \Longrightarrow$

$$u_0 \, R_1^* = \bigcup_{\textit{finie}} S \, v$$

$$S \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^* \;, \quad \sigma(v) = \sigma(u_0)$$

Par distributivité

$$P = \bigcup_{\textit{finie}} S \, v \, u_1 \, R_2^* \, u_2 \cdots u_{r-1} \, R_r^* \, u_r$$

En itérant le processus,

$$P = \bigcup_{\textit{finie}} L \, w$$

$$L \in \mathrm{Rat}\,(A \times B)^* \;, \quad \sigma(w) = \sigma(u_0 \, u_1 \cdots u_r)$$

Version automatique du résultat

$\mathcal{A} = \langle\, Q, A^* \times B^*, E, I, T\,\rangle$, automate *avec fonction finale*:

$$\forall q \in Q \qquad T_q \subset \mathrm{Diff}_k$$

Cor. 2 .— *Une relation rationnelle à saillie bornée par k est réalisée par un automate fini lettre-à-lettre avec fonction finale dans $\mathfrak{P}(\mathrm{Diff}_k)$.*

Prop. 3 .— *Tout automate fini lettre-à-lettre avec fonction finale dans $\mathfrak{P}(\mathrm{Diff}_k)$ est équivalent à un automate fini lettre-à-lettre déterministe complet avec fonction finale dans $\mathfrak{P}(\mathrm{Diff}_k)$.*

Cor. 4 .— *La famille des relations rationnelles à saillie bornée par k est fermée par union et différence.*

Automates à décalage borné

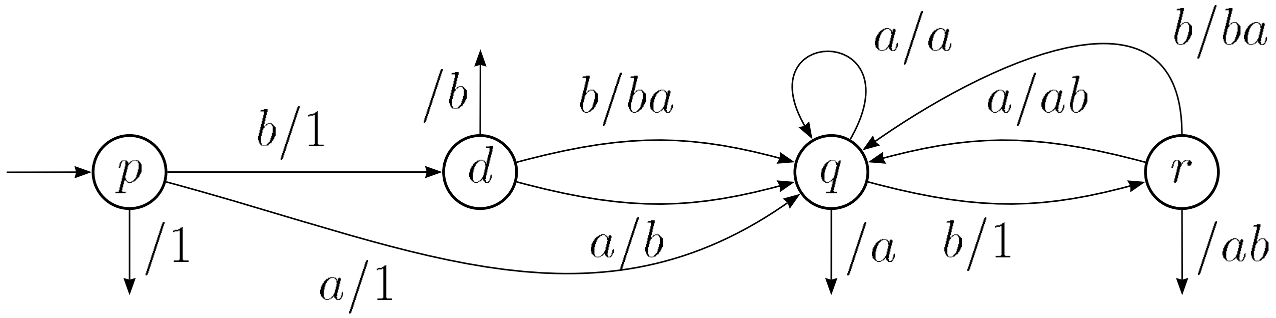
$$c \ := \ q_0 \xrightarrow{(f_1,g_1)} q_1 \xrightarrow{(f_2,g_2)} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{(f_n,g_n)} q_n$$

$$\mathrm{del}(c,r) \ = |f_1\, f_2 \ldots f_r| - |g_1\, g_2 \ldots g_r|$$

$$\mathrm{dec}(c) \ = \max\{|\,\mathrm{del}(c,r)|\mid 0 \le r \le |c|\}$$

$$\mathrm{dec}(\mathcal{A}) \ = \max\{\mathrm{dec}(c)\mid c \quad \text{calcul réussi de} \quad \mathcal{A}\}$$

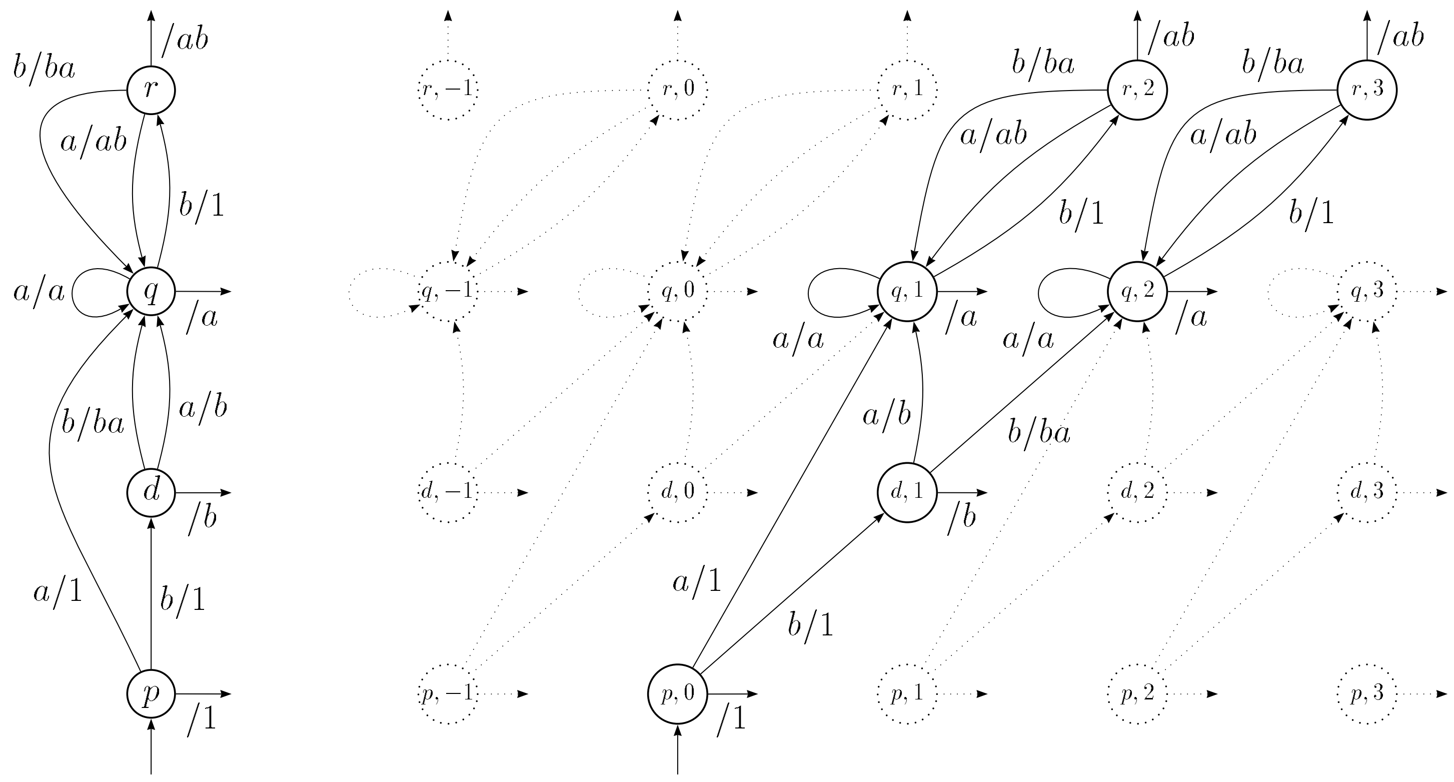
Un automate émondé a un décalage fini si, et seulement si, la saillie de l'étiquette de chaque boucle est nulle.



Une relation rationnelle a une saillie finie si, et seulement si, tout automate émondé qui la réalise est à décalage borné.

Tout automate fini sur $A^*{\times}B^*$ à décalage borné est équivalent à un automate lettre-à-lettre, avec fonction finale dans $\mathfrak{P}(\mathrm{Diff}_k)$, pour un certain k, et cet automate lettre-à-lettre est effectivement calculable.

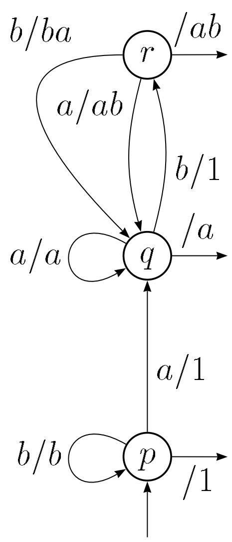
Etape 1. Construction d'un automate *valué*.

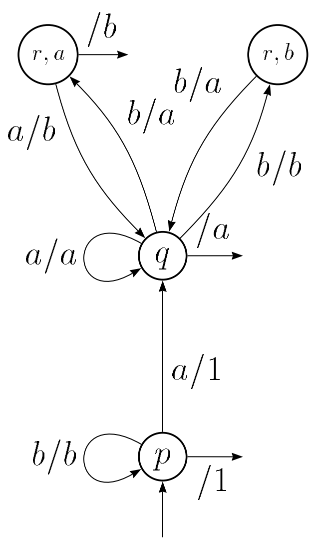


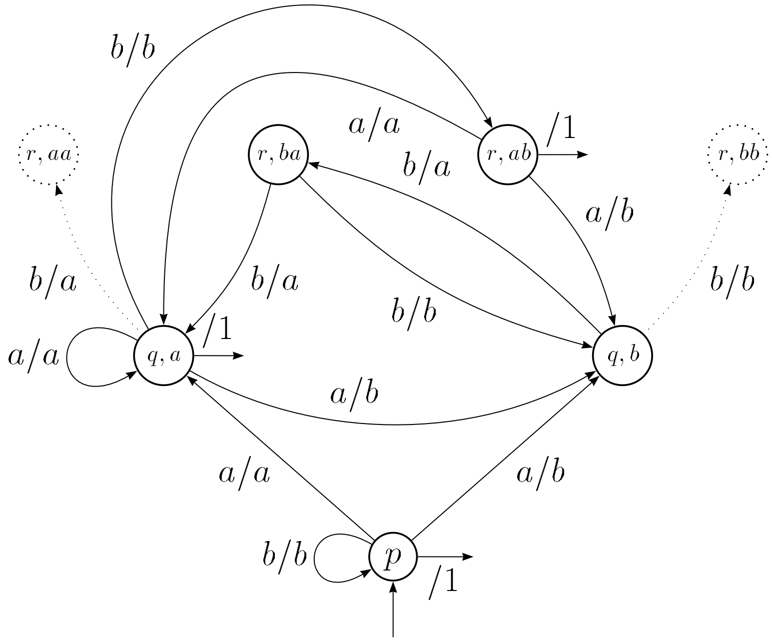
Etape 2.
Diminution du rang maximum par une sorte de co-revêtement.

$$\mathcal{A} = \langle\, Q, A^* \times B^*, E, I, T \,\rangle \qquad \mathcal{B} = \langle\, Q', A^* \times B^*, E', I, T' \,\rangle$$

$$Q = P \cup R \qquad\qquad Q' = P \cup (R \times B)$$







$\forall b, c \in B$

$$(p, (f, g), r) \in E \cap (P \times R) \quad \Longrightarrow \quad (p, (f, gb), (r, b)) \in E'$$

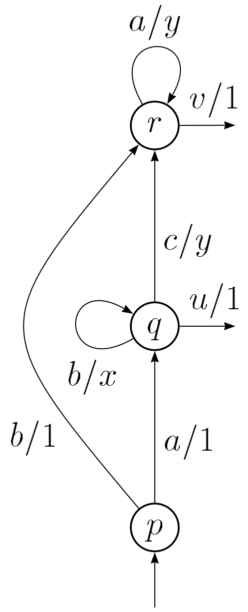
$$(s, (f, g), p) \in E \cap (R \times P) \quad \Longrightarrow \quad ((s, c), (f, c^{-1}g), p) \in E'$$

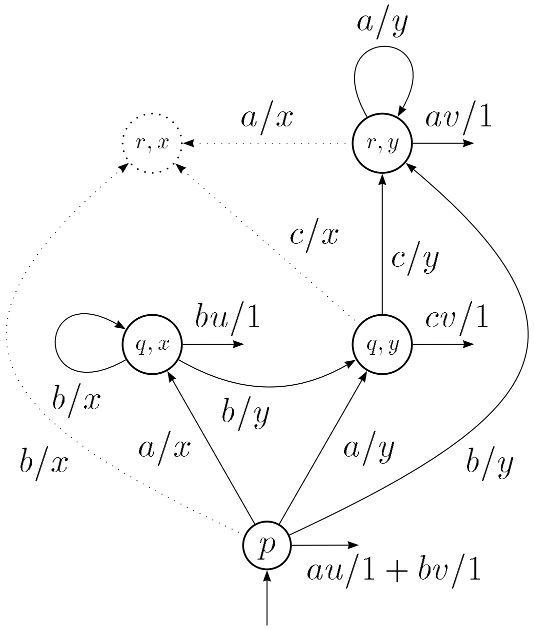
$$(s, (f, g), r) \in E \cap (R \times R) \quad \Longrightarrow \quad ((s, c), (f, c^{-1}gb), (r, b)) \in E'$$

$p \in P \quad \Longrightarrow \quad T'_p = T_p \qquad$ et $\qquad r \in R \quad \Longrightarrow \quad T'_{r,b} = (1, b^{-1})T_p$

Etape 3.

Traitement des fonctions finales dans $A^* \times 1$.





$\forall c \in B$

$$(p, (f, g), r) \in E \cap (P \times R) \quad \text{et} \quad (h, 1) \in T_r \quad \Longrightarrow \quad (fh, g) \in T'_p$$

$$(s, (f, g), r) \in E \cap (R \times R) \quad \text{et} \quad (h, 1) \in T_r \quad \Longrightarrow \quad (fh, c^{-1}g) \in T'_{s,c}$$

Minimisation des automates lettre-à-lettre

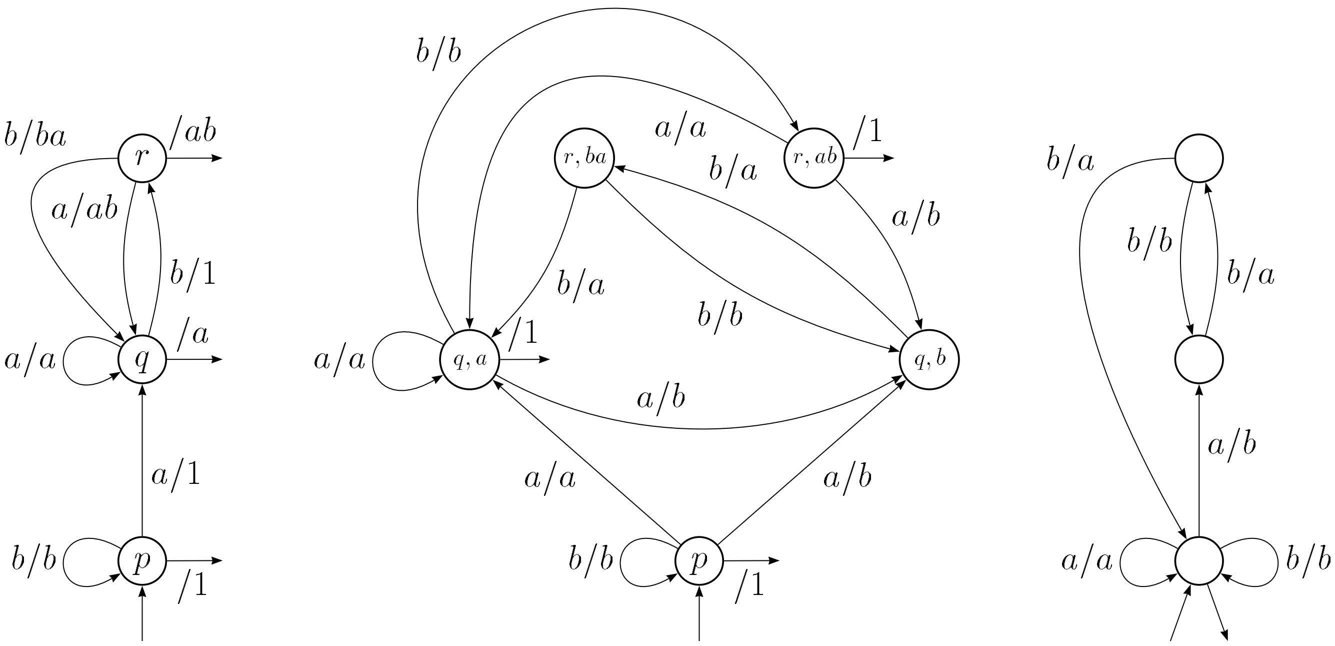
Prop. 5 .—
Tout automate lettre-à-lettre avec fonction finale est équivalent à un automate lettre-à-lettre déterministe minimal.

Continuations de u dans R:

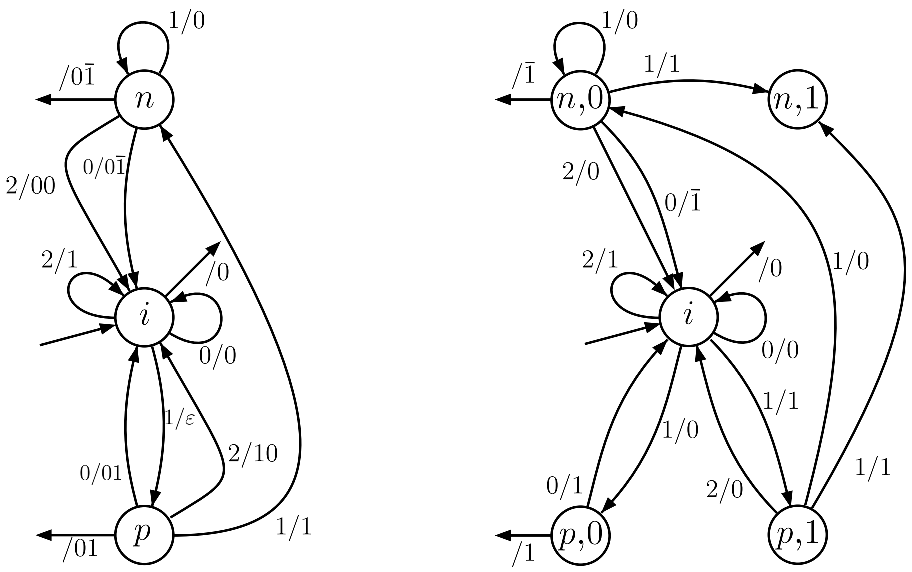
$$R \subset A^* \times B^* \,,\; \forall u \in (A \times B)^*$$
$$\mathrm{Cont}_R(u) \;=\{w \in (A^* \times 1_{B^*}) \cup (1_{A^*} \times B^*) \mid u\,w \in R\}$$

R définit une relation d'équivalence ρ_R sur $(A \times B)^*$ par

$$u \simeq v \quad \mathrm{mod}\ \rho_R \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall t \in (A \times B)^* \qquad \mathrm{Cont}_R(u\,t) = \mathrm{Cont}_R(v\,t)$$


r
p
q
/ab
b/ba
a/ab
b/1
a/a
/a
a/1
b/b
/1
b/b
a/a
r, ab
/1
r, ba
b/a
a/b
b/a
b/b
q, a
/1
q, b
a/b
a/a
a/b
b/b
p
/1
b/a
b/b
b/a
a/b
a/a
b/b

Le problème



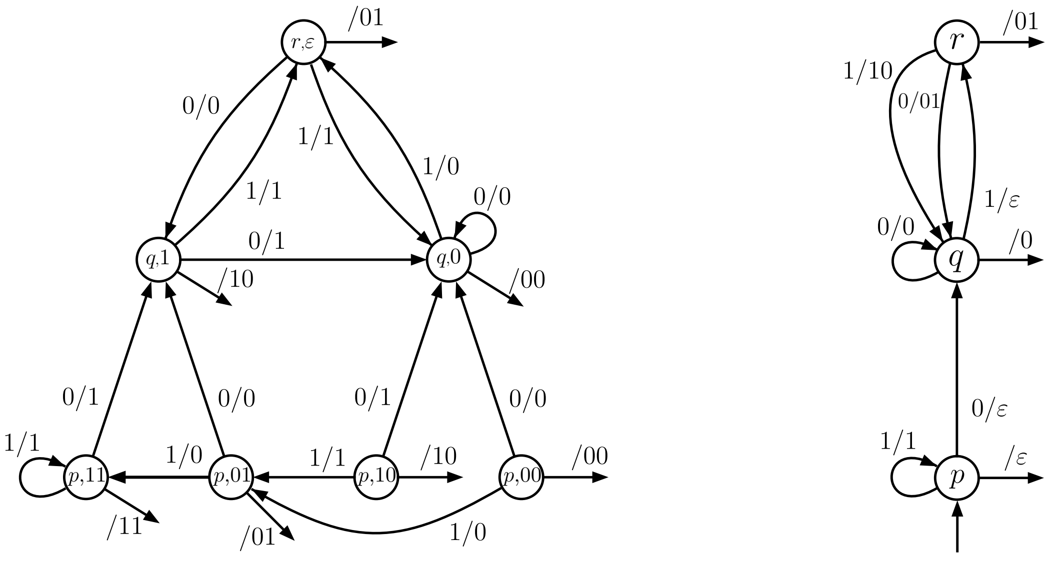
L'additionneur d'Avizienis, automate à délai borné $\mathcal{A}$ et un automate lettre-à-lettre $\mathcal{E}$ équivalent.

Resynchronisation déterministe (2)

$\rho(s)$ = *retard* en s
$\delta(s)$ = *la variation maximale du retard constaté sur les chemins issus de s*:

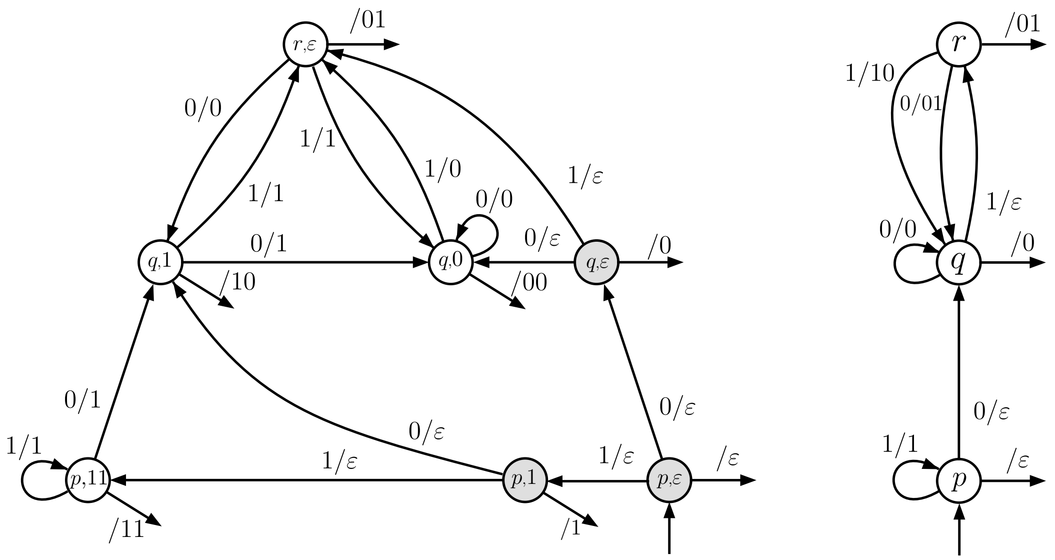
$$\delta(s) = \max\{(\rho(t) - \rho(s)) \mid t \text{ accessible depuis } s\}.$$

$$\delta(p) = \max\{0,1,2\} = 2\,,\quad \delta(q) = \max\{0,1\} = 1\,,$$
$$\delta(r) = \max\{-1,0\} = 0$$



Partie *synchrone* du pré-revêtement

Resynchronisation déterministe (3)



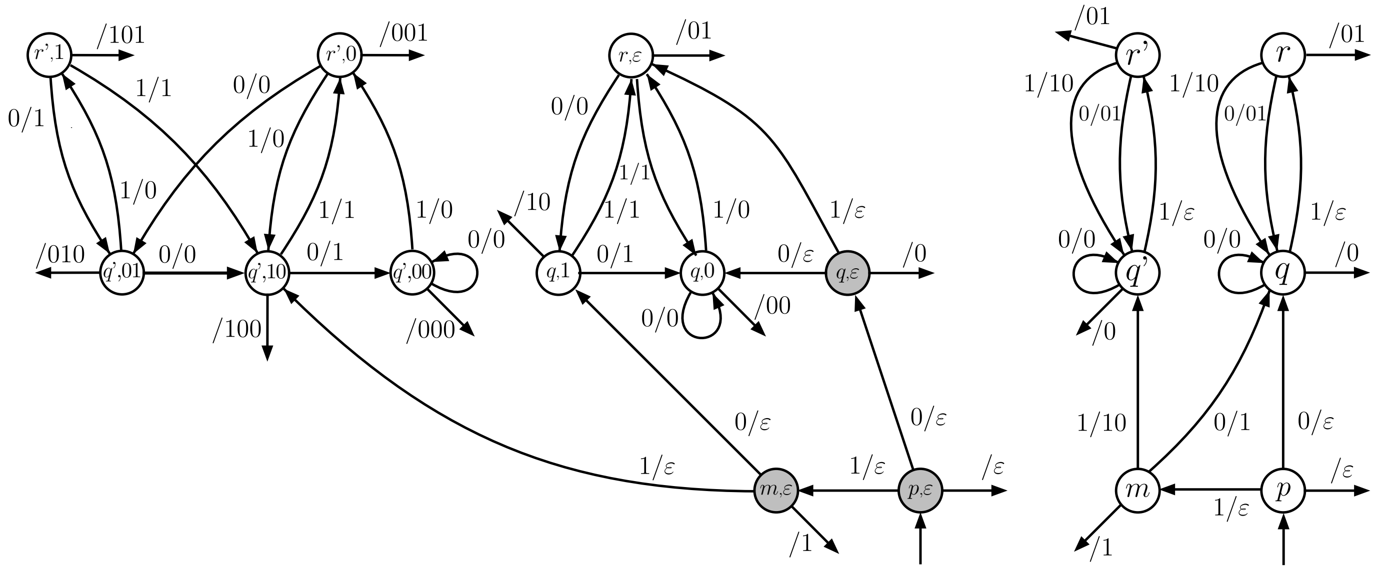
L'automate $\mathcal{D}$, pré-revêtement en ligne de $\mathcal{C}$

Resynchronisation déterministe (4)

La solution (suite et fin)

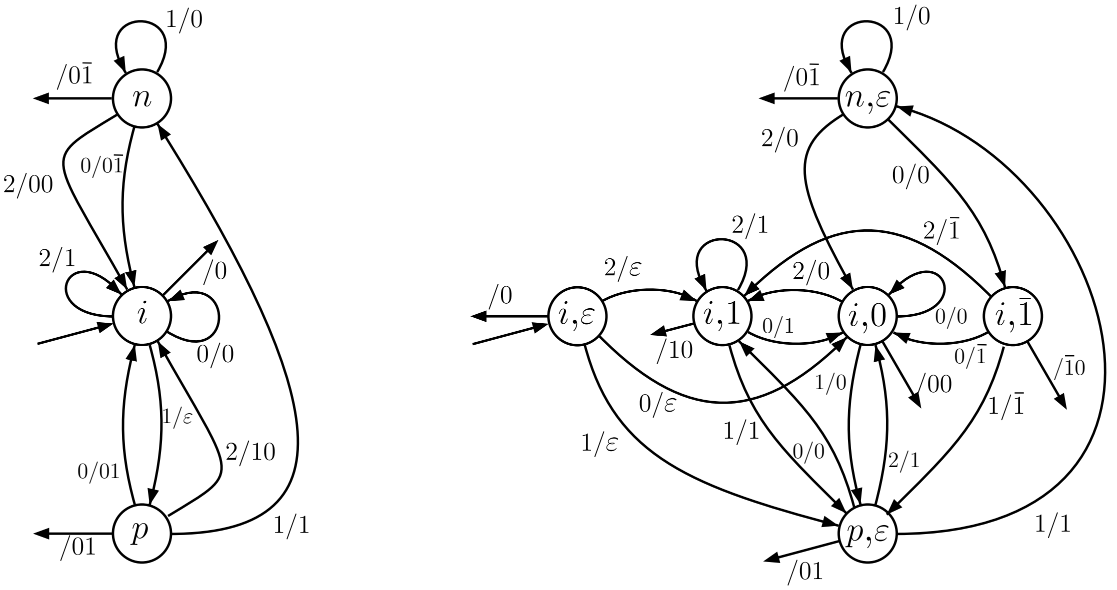
$$\mathbf{P} = \max\{\rho(s) \mid s \in Q\} \qquad\qquad \zeta(s) = \mathbf{P} - \rho(s)$$

$$\zeta(p) = \delta(p) = 2\,, \quad \zeta(m) = \zeta(q) = \delta(m) = \delta(q) = 1\,,$$
$$\zeta(r) = \delta(r) = 0\,, \quad \zeta(q') = 2\,, \quad \zeta(r) = 1$$



Resynchronisation déterministe (5)

La réponse au problème



Le pré-revêtement en ligne de $\mathcal{A}$