Revêtements d'automates: une théorie opératoire

2$^{\text{ème}}$ journée

$\mathcal{A}$ automate sur $A^* \Longrightarrow$

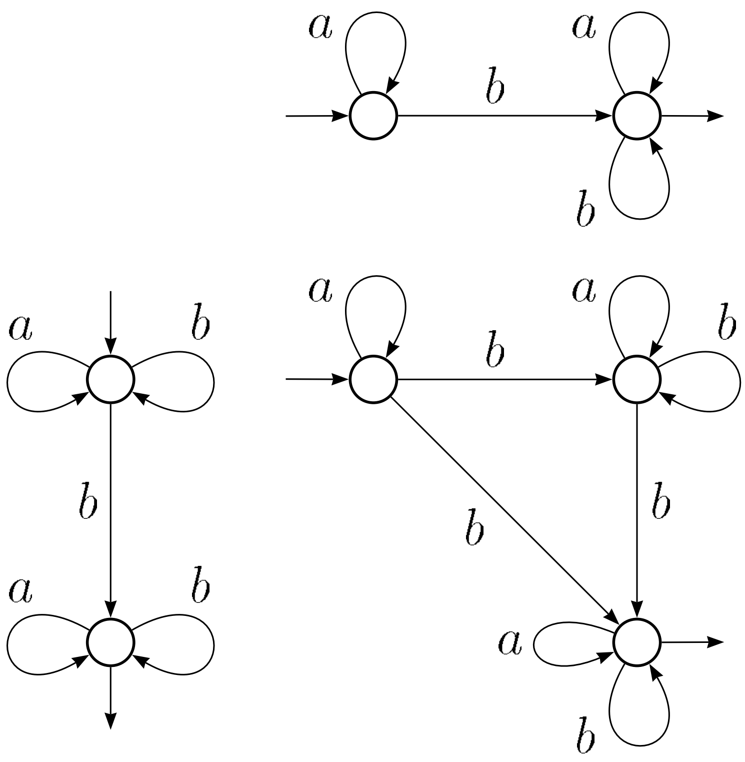
$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$, déterminisé de $\mathcal{A}$ par la méthode des sous-ensembles.

Th. & Déf. 1 .—
Revêtement de Schützenberger *de* $\mathcal{A}$ =
partie accessible $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \times \mathcal{A}$.

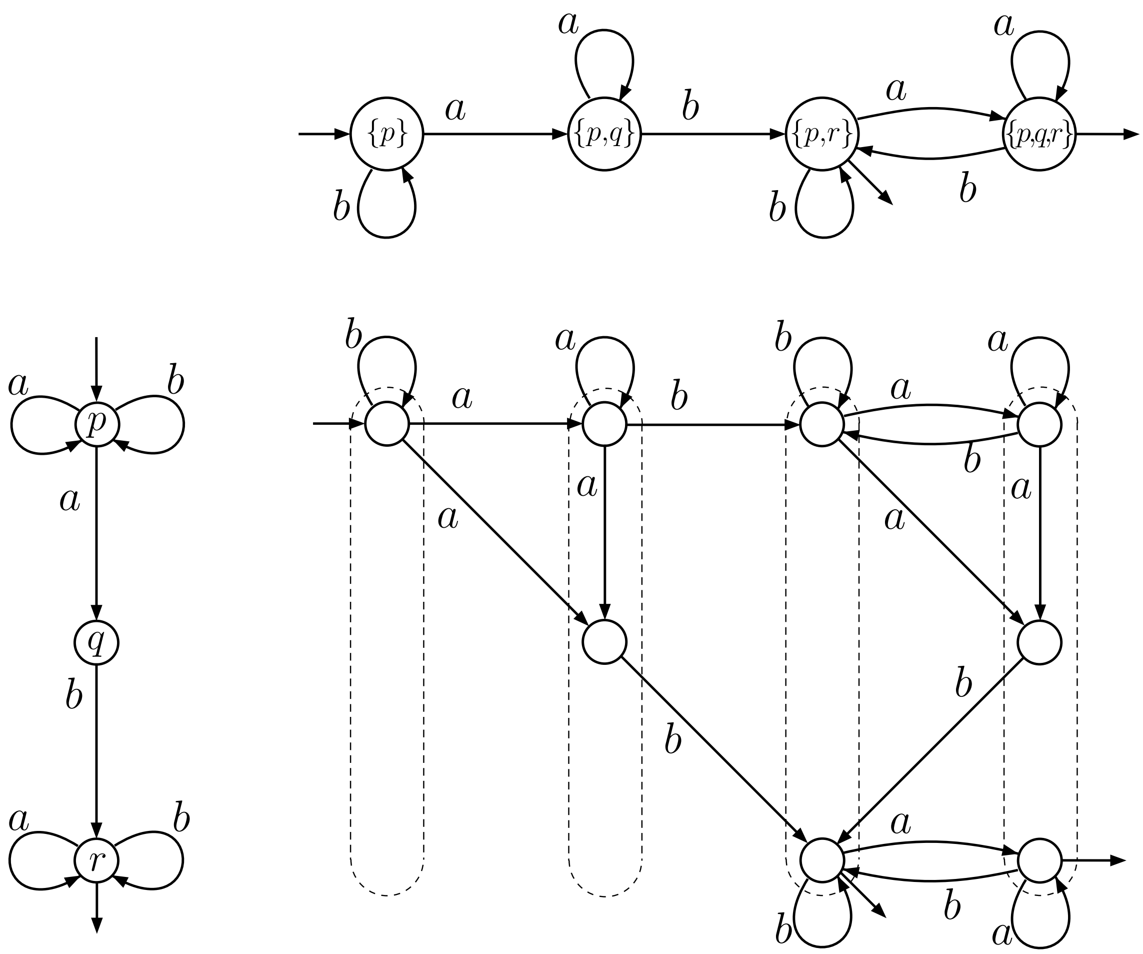
Deux propriétés:

i) $\pi_{\mathcal{A}}$ *: revêtement de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{A}$.

ii) $\pi_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}}$ *: morphisme localement co-surjectif de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$.



Revêtement de Schützenberger (2)



$\mathcal{B}$, automate *déterministe* et *complet* sur A.
$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est localement bijectif.

$\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, revêtement; $\mathcal{C}$, partie *accessible* de $\mathcal{B}$.
La restriction de φ à $\mathcal{C}$ est un revêtement de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{A}$.

PROP. 1 .— *Soient $\mathcal{A}$ un automate, $\mathcal{B}$ un automate déterministe équivalent à $\mathcal{A}$, et $\mathcal{S}$ la partie accessible de $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$. Alors $\pi_{\mathcal{A}}$ est un revêtement de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{A}$.*

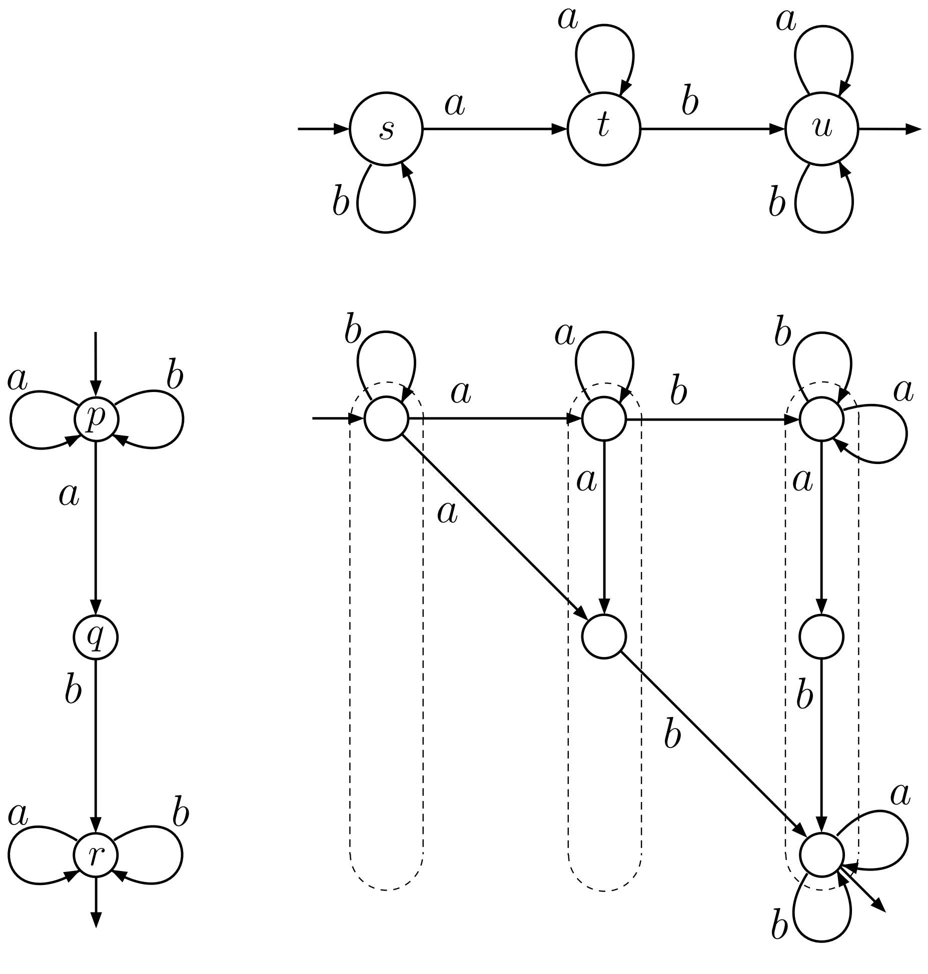
Dém. du Th. 1. Il reste à établir la condition ii).
De la définition de $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \langle\, \mathfrak{P}(Q), A, F, \{I\}, U \,\rangle$:

$$P \xrightarrow[\mathcal{A}_{\mathcal{D}}]{a} S \quad \Longleftrightarrow \quad S = \{q \mid \exists p \in P \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q\}$$

on déduit

$$\forall P, S \subset Q\,, \quad \forall q \in S \quad P \xrightarrow[\mathcal{A}_{\mathcal{D}}]{a} S \Longrightarrow \exists p \in P \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q$$
$$\Longrightarrow \exists p \in P \quad (P, p) \xrightarrow[\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \times \mathcal{A}]{a} (S, q)$$

Revêtement de Schützenberger (4)

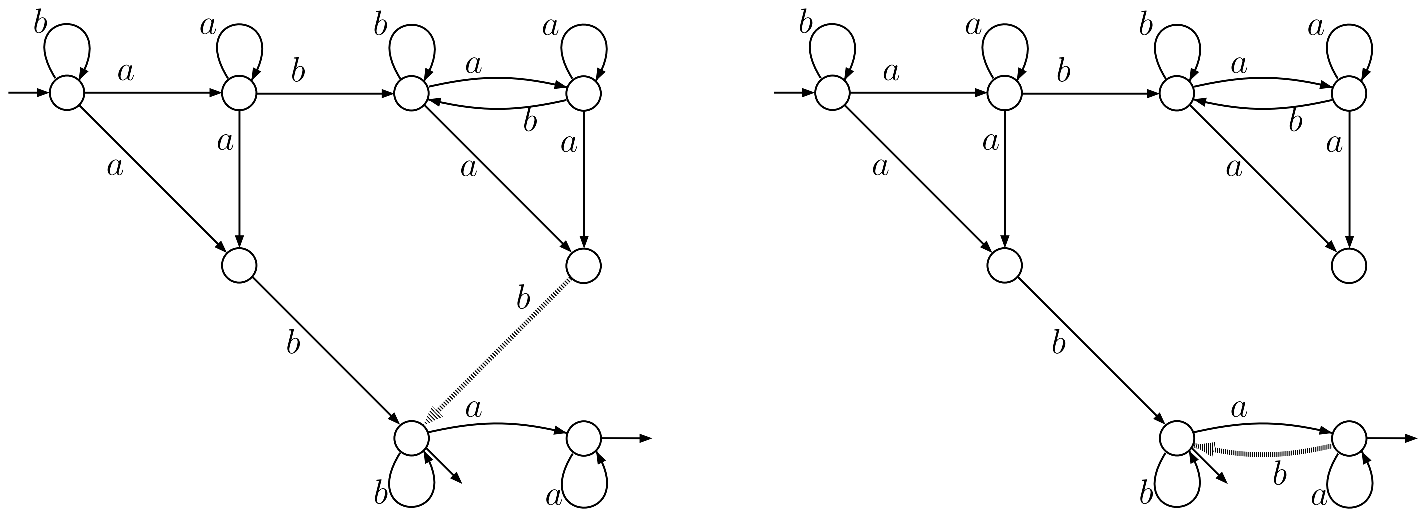


$\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est une *immersion* si:

i) φ est *localement injectif*;

ii) pour chaque i dans I, il existe *au plus un* j dans J tel que $j\varphi = i$.

Cor. 2 .— *Tout automate (sur un monoïde libre) admet une immersion équivalente et non-ambiguë.*



$\mathcal{A}$ automate sur $A^* \Longrightarrow$

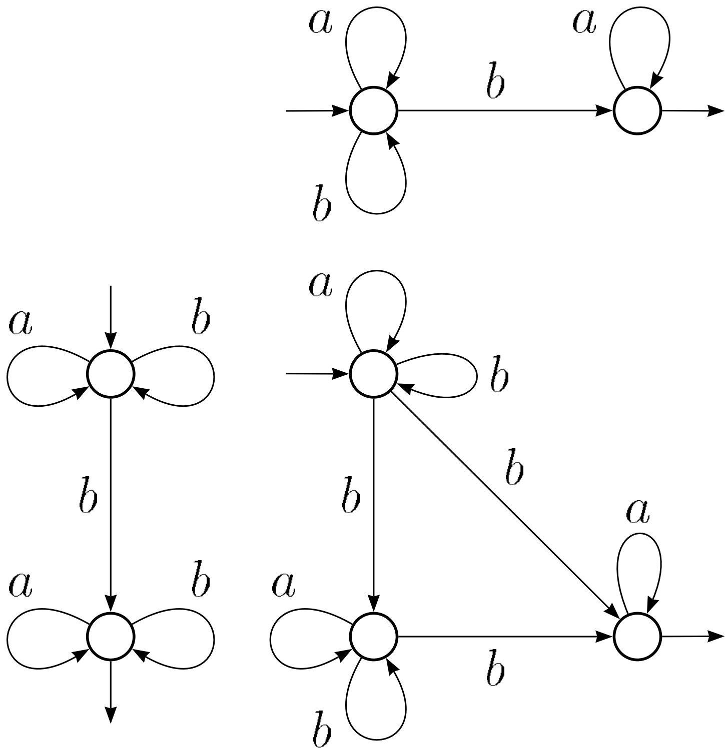
$\mathcal{A}_{\mathrm{co}\mathcal{D}}$, co-déterminisé de $\mathcal{A}$.

Th. & Déf. 2 .—
Co-revêtement de Schützenberger *de* $\mathcal{A}$ =
partie co-accessible $\mathcal{S}'$ *de* $\mathcal{A}_{\mathrm{co}\mathcal{D}} \times \mathcal{A}$.

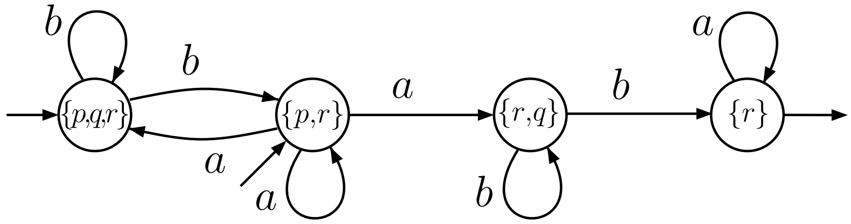
Deux propriétés:

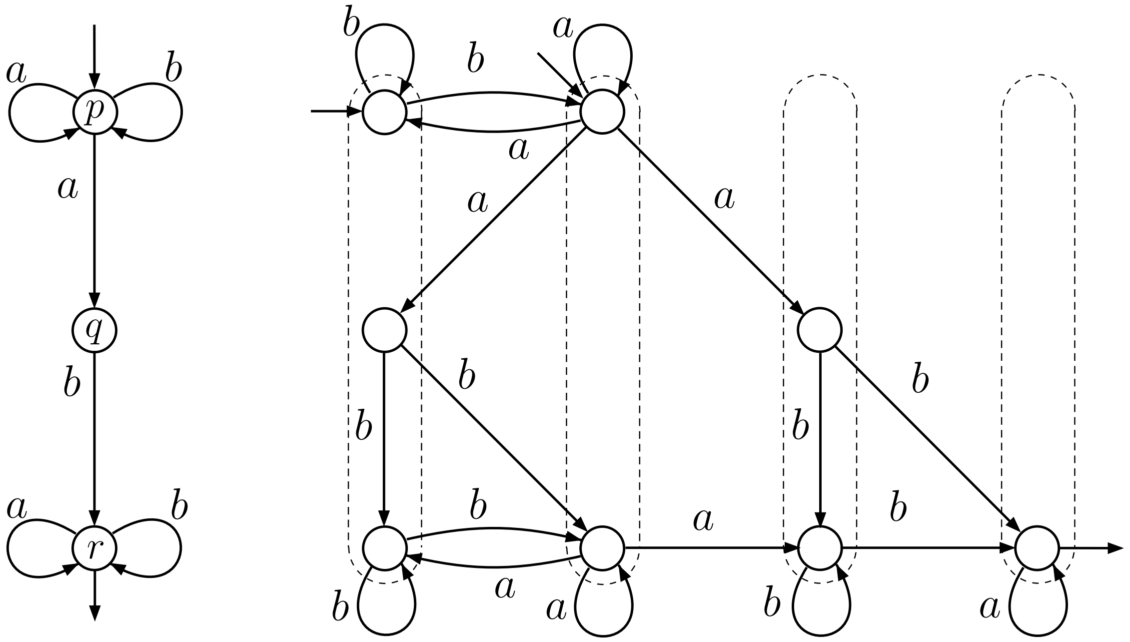
i) $\pi_{\mathcal{A}}$ *: co-revêtement de* $\mathcal{S}'$ *sur* $\mathcal{A}$.

ii) $\pi_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}}$ *: morphisme localement surjectif de* $\mathcal{S}'$ *sur* $\mathcal{A}_{\mathrm{co}\mathcal{D}}$.



Co-revêtement de Schützenberger (2)





$\varphi: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est une *co-immersion* si:

i) φ est *localement co-injectif*;

ii) pour chaque t dans T, il existe *au plus un* s dans U tel que $s\varphi = t$.

Cor. 3 .— *Tout automate (sur un monoïde libre) admet une co-immersion équivalente et non-ambiguë.*

Réalisation par morphismes

Th. 3 [Nivat] .—
$\tau\colon A^* \rightarrow B^*$ est rationnelle si, et seulement si, il existe Z, $\varphi\colon Z^* \rightarrow A^*$, $\psi\colon Z^* \rightarrow B^*$ et $K \in \operatorname{Rat} Z^*$ tels que

$$\text{i)}\ \ \widehat{\tau} = (K)\,\varphi{\times}\psi \qquad \textit{ou} \qquad \text{ii)}\ \ \tau = \varphi^{-1}\circ\iota_K\circ\psi\ \ .$$

Réalisation par représentation

Th. 4 [Kleene–Schützenberger] .—
$\tau\colon A^* \rightarrow B^*$ est rationnelle si, et seulement si, il existe $(\lambda, \mu, \nu)\colon A^* \rightarrow \operatorname{Rat} B^*$ telle que

$$\forall f \in A^* \qquad f\tau = (\lambda \cdot f\mu \cdot \nu)$$

Composition

Th. 5 [Elgot–Mezei] .—
$\theta\colon A^* \rightarrow B^*$ et $\sigma\colon B^* \rightarrow C^*$ rationnelles $\Longrightarrow$
$\theta \circ \sigma\colon A^* \rightarrow C^*$ rationnelle.

Réalisation par morphismes

$$
\begin{tikzcd}
(A \cup B \cup C)^* \arrow[rr, dotted, "\iota_{(K)\psi_C^{-1}}"] \arrow[d, dotted, "\psi_C"'] & & (A \cup B \cup C)^* \arrow[rr, dashed, "\iota_T"] \arrow[d, dashed, "\psi_C"'] & & (A \cup B \cup C)^* \arrow[rr, dotted, "\iota_{(L)\psi_A^{-1}}"] \arrow[d, dashed, "\psi_A"] & & (A \cup B \cup C)^* \arrow[d, dotted, "\psi_A"] \\
(A \cup B)^* \arrow[rr, "\iota_K"] \arrow[d, "\chi"'] & & (A \cup B)^* \arrow[dr, "\varphi_A"] & & (B \cup C)^* \arrow[dl, "\varphi_C"'] \arrow[rr, "\iota_L"] & & (B \cup C)^* \arrow[d, "\omega"] \\
A^* \arrow[rrr, Rightarrow, "\theta"'] & & & B^* \arrow[rrr, Rightarrow, "\sigma"'] & & & C^*
\end{tikzcd}
$$

Réalisation par représentation

Th. 6 [Schützenberger] .—

$$
\left.\begin{array}{ll}
\theta\colon A^* \to B^* & \textit{réalisée par } (\lambda, \mu, \nu) \\
\sigma\colon B^* \to C^* & \textit{réalisée par } (\eta, \kappa, \xi)
\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow
$$

$$
\theta \circ \sigma\colon A^* \to C^* \ \textit{réalisée par } (\lambda, \mu, \nu) \circ (\eta, \kappa, \xi)
$$

$\mathbb{K}$, semi-anneau commutatif

Lem. 4 .—

$$\left.\begin{array}{l} \mu\colon A^* \to \mathbb{K}\langle\langle B^* \rangle\rangle^{Q\times Q} \\ \kappa\colon B^* \to \mathbb{K}\langle\langle C^* \rangle\rangle^{R\times R} \end{array}\right\} \quad \textit{morphismes} \quad \Longrightarrow$$

$$\textit{l'application} \quad \mu \circ \kappa\colon A^* \to \mathbb{K}\langle\langle C^* \rangle\rangle^{(Q\times R)\times(Q\times R)}$$

définie par $[(f)\mu \circ \kappa]_{(q,R),(s,R)} = (f\mu_{q,s})\kappa$ *est un morphisme.*

$$(\zeta, \pi, \omega) = (\lambda, \mu, \nu) \circ (\eta, \kappa, \xi)$$

$$\pi = \mu \circ \kappa$$

$$\forall q \in Q \qquad \zeta_{(q,R)} = \eta \cdot (\lambda_q)\kappa$$

$$\forall q \in Q \qquad \omega_{(q,R)} = (\nu_q)\kappa \cdot \chi$$

Problème: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $\theta\colon A^* \to B^*$ défini par

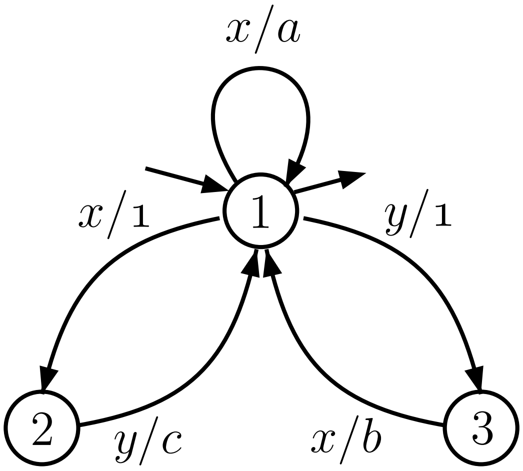
$$a\theta = x \ , \quad b\theta = yx \ , \quad c\theta = xy$$

Donner un automate qui réalise $\theta\theta^{-1}$.

Solution: $(1, \theta, 1)$ est une représentation de dimension 1 de θ. $\widehat{\theta} = [(a,x) + (b,yx) + (c,xy)]^*$ d'où

$$\widehat{\theta^{-1}} = [(x,a) + (yx,b) + (xy,c)]^* =$$
$$[(x,a) + (y,b)(x,1) + (x,c)(y,1)]^*$$

qui conduit à l'automate:



qui donne la représentation (λ, μ, ν) pour θ^{-1}:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x\mu = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\theta \circ \theta^{-1}$ est réalisée par

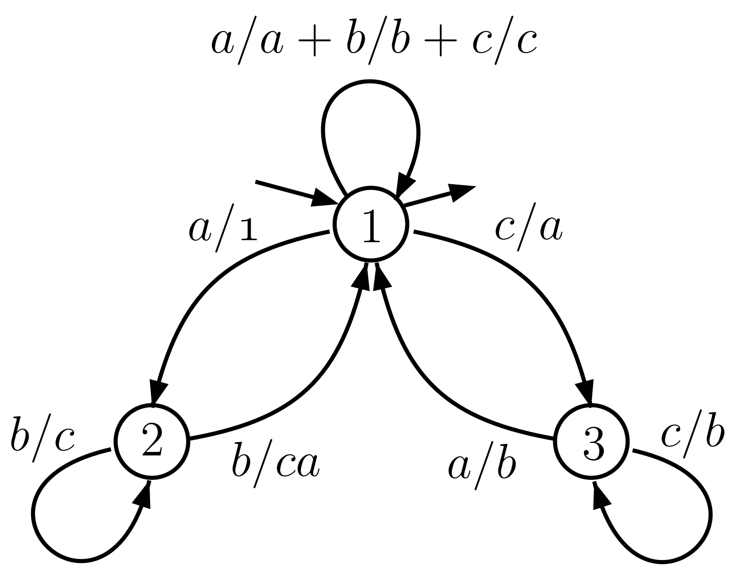
$$(\zeta, \kappa, \eta) = (1, \theta, 1) \circ (\lambda, \mu, \nu)$$

$$\zeta = \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$a\kappa = x\mu = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad b\kappa = yx\mu = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ ca & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$c\kappa = yx\mu = \begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} , \quad \eta = \nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de construire l'automate:

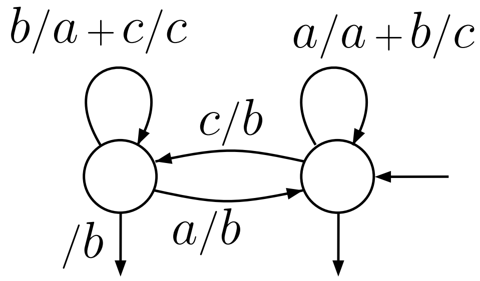


Problème: $A = \{a, b, c\}$. Les mots de A^* sont la représentation d'entiers écrits en base 3 (avec $a = 0$, $b = 1$, et $c = 2$). Calculer un automate sur $A^* \times A^*$ qui réalise la multiplication par 2. En déduire un automate qui réalise la multiplication par 4.

$\overline{f}$ = l'entier représenté par f.

$$\overline{c} \times 2 = 4 = \overline{bb} \qquad \overline{a} \times 2 + \overline{b} = 1 = \overline{b}$$

$$\overline{b} \times 2 + \overline{b} = 3 = \overline{ba} \qquad \overline{c} \times 2 + \overline{b} = 5 = \overline{bc}$$



Automate droit qui réalise la multiplication par 2

On *renverse les flèches* et on obtient:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix}, \quad a\mu = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

$$b\mu = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad c\mu = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\zeta,\kappa,\eta)=(\lambda,\mu,\nu)\circ(\lambda,\mu,\nu)$$

$$a\mu\circ\mu=\left(\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{array}\right) b\mu\circ\mu=\left(\begin{array}{cccc} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right)$$

$$c\mu\circ\mu=\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

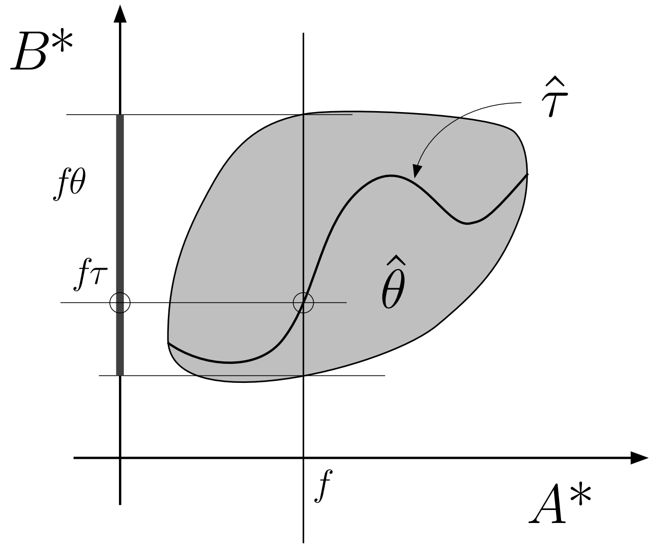
$$\zeta=\lambda\cdot(\lambda\circ\mu)=\left(\begin{array}{cc} 1 & b \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc} 1 & b & c & ba \end{array}\right)$$

$$\eta=(\nu\circ\mu)\cdot\nu=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)\quad .$$

$\theta\colon E \to F$ une relation, quelconque

$\tau\colon E \to F$, fonction, *uniformise* θ

$$\mathrm{Dom}\,\tau = \mathrm{Dom}\,\theta \qquad \text{et} \qquad \forall e \in \mathrm{Dom}\,\theta \qquad e\tau \in e\theta$$



TH. 7 [Théorème d'uniformisation rationnelle] .—
Toute relation rationnelle est uniformisée par une fonction rationnelle non ambiguë.