

LABORATOIRE



INFORMATIQUE, SIGNAUX ET SYSTÈMES
DE SOPHIA ANTIPOLIS
UMR 6070

DIMENSIONNEMENT HEURISTIQUE DES RÉSEAUX OPTIQUES WDM MULTIFIBRES PAR ARRONDI ALÉATOIRE DE MULTIFLOT

Nicolas Baskiotis, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano

Projet MASCOTTE

Rapport de recherche
I3S/RR-2002-10-FR

mars 2002

RÉSUMÉ : Ces travaux s'attachent à définir le problème du routage optique multifibres ainsi qu'une modélisation en terme de multiflot entier. Cette modélisation permet d'envisager de bonnes approximations et heuristiques.

MOTS CLÉS : Réseaux optiques, multiplexage en longueurs d'onde, dimensionnement, multiflot, multifibre, arrondi aléatoire

ABSTRACT: This work deals with the definition of the multifiber optical routing problem and a model in terms of integer multicommodity flow. This model leads to good approximations and heuristics.

KEY WORDS : Optical networks, wavelength division multiplexing, design, multicommodity flow, multifiber, randomized rounding

Dimensionnement heuristique des réseaux optiques WDM multifibres par arrondi aléatoire de multiflot

Nicolas Baskiotis

Stéphane Pérennes

Hervé Rivano

25 Juin - 9 aout 2001

1 Introduction

La technologie des communications optiques, étudiée dès le début des années 1990 [CGK92, Pan92], est devenue le support privilégié des réseaux de télécommunications. En effet, les caractéristiques des fibres optiques et des émetteurs/récepteurs optoélectroniques actuels s'accordent extrêmement bien aux nécessités des télécommunications modernes.

Les réseaux optiques d'infrastructure se présentent sous la forme de nœuds inter-connectés par des liaisons optiques. Les nœuds rassemblent un routeur et des émetteurs-récepteurs. Le routeur fait transiter l'information qui lui arrive d'une fibre ou d'un émetteur vers le récepteur ou la fibre appropriée suivant qu'elle était destinée au nœud lui même ou simplement "en transit". Les émetteurs/récepteurs sont soit des terminaux (serveurs, ...), soit des réseaux de taille inférieure (par exemple les réseaux d'une ville si l'on considère le réseau d'infrastructure européenne). Les liens optiques sont des câbles comprenant en général plusieurs fibres. En effet, le coût majoritaire de l'installation d'un lien est dû aux travaux d'enfouissement qui sont incompressibles et les opérateurs préfèrent les rentabiliser en installant plusieurs fibres à la fois.

La technologie optique, décrite plus en détail en section 2.1, offre des performances que les émetteurs/récepteurs électroniques actuels sont incapables d'exploiter. Une solution à ce déséquilibre est apportée par la technique de *multiplexage en longueur d'onde* WDM, étudiée en section 2.2. Les réseaux WDM fonctionnent en *mode connecté* : à chaque paire émetteur/récepteur voulant communiquer, il faut affecter un chemin et une longueur d'onde.

Notre travail traite de l'optimisation des réseaux WDM *multifibres* et plus particulièrement *k-fibres*. En effet, les coûts de déploiement d'un réseau optique d'infrastructure sont gigantesques et les opérateurs sont intéressés par l'optimisation de la taille des liens installés et de la complexité des routeurs présents dans les nœuds du réseau.

Dans le chapitre 2, après avoir décrit la technologie optique et la technique de multiplexage en longueur d'onde, nous exposons la modélisation classique des réseaux optiques en terme de graphes. Nous définissons notamment le problème du *routage optique* dans le contexte des réseaux *k-fibres* qui consiste à vérifier s'il est possible de réaliser une *instance de communication* sur un réseau avec *k* fibres par lien et *c* longueurs d'onde disponibles. Nous exposons ensuite les résultats principaux de la littérature concernant les réseaux monofibres et multifibres. Ces derniers ne sont étudiés que depuis peu et principalement dans le but de résoudre le problème de *planification optique* où le routage est fixé. L'intérêt principal de notre travail consiste d'ailleurs en l'étude du problème à routage non fixé.

La suite de ce document est consacrée à l'étude de la résolution approchée de ce problème \mathcal{NP} -complet dans le cas général.

Dans le chapitre 3, nous rappelons la définition des problèmes de *flot* et de *multiflot entier* ainsi que quelques propriétés importantes. Nous formulons ensuite le problème du routage optique sur un réseau comme un multiflot entier dans un graphe auxiliaire. Cela nous permet d'exploiter dans la suite les connaissances relatives au multiflot et sa maniabilité pour obtenir des approximations du routage optique.

La \mathcal{NP} -complétude des problèmes considérés, nous amène à nous intéresser à des techniques d'approximation dans le chapitre 4. Nous présentons tout d'abord un algorithme d'arrondi aléatoire issu d'une technique classique d'approximation des programmes linéaires ainsi que son analyse de performances. Ensuite nous tentons de palier à certains défauts de cette méthode à l'aide de trois heuristiques fondées sur le même principe de construction aléatoire de solutions guidée par la résolution fractionnaire du multiflot.

La section 5 est consacrée à la description et à la discussion des résultats expérimentaux obtenus par notre implémentation des heuristiques précédentes sur des instances réelles telles que les réseaux français et européens fournis par France Telecom R&D pour le projet PORTO au sein duquel notre code a été développé.

Enfin, nous concluons sur les possibilités d'amélioration, d'extension et d'exploitation de ce travail.

2 Les réseaux optiques

2.1 La technologie optique

Une liaison optique est réalisée principalement à l'aide d'un "Laser", d'une fibre optique conduisant le signal et d'un photodétecteur. L'émetteur transforme la suite de bits à transmettre en modulation d'une onde optique porteuse. La fréquence de cette onde détermine la bande passante disponible sur le lien car au plus un bit par période peut être transmis. Ainsi l'un des points forts des communications optiques est la bande passante qu'elles peuvent utiliser puisque les fréquences des signaux optiques vont de 10^{14} à 10^{15} Hz. Il est donc possible d'atteindre en théorie la centaine ou le millier de terabits par seconde ($1Tb = 10^{12}$ bits), ce qui est bien plus grand que les besoins en télécommunications prévus pour les prochaines années.

L'autre intérêt des communications optiques est dû aux fibres optiques. Celle-ci sont moins volumineuses, plus légères et moins chères que les câbles électriques utilisés dans les réseaux de générations précédentes. De plus elles présentent des taux d'atténuation du signal bien inférieurs à ceux des câbles en cuivre; ainsi le taux de pertes de bit sont microscopiques même pour de grandes distances : pour des débits allant jusqu'à 1 Gb/s, le signal présente un taux d'erreur considéré comme nul ($< 10^{-9}$ erreurs par bit) jusqu'à 200 km. En plaçant des répéteurs le long d'un lien, il est facile et peu coûteux d'obtenir des liaisons optiques de plusieurs milliers de kilomètres (comme la fibre Europe-Australie). Ces deux atouts, faibles coûts et faibles taux de pertes, ont permis l'explosion des liaisons intercontinentales.

Un problème se pose alors. La bande passante disponible dans les réseaux modernes est titanesque, mais les consommateurs de cette ressource restent des équipements électroniques (serveurs web, visio-conférence, téléphonie, télévision, ...) qui sont loin de l'exploiter complètement. La réponse est le multiplexage des flux d'informations. La technique la plus connue est le multiplexage temporel (TDM pour Time Division Multiplexing), mais elle suppose l'existence d'un équipement optoélectronique capable d'émettre au débit maximal permis pour l'optique, or la technologie ne le permet pas ou bien à des tarifs prohibitifs.

La technologie du multiplexage en longueur d'onde (WDM pour Wavelength Division Multiplexing) résout ce problème au prix d'une plus grande complexité d'optimisation. Cette technique est le standard actuel dans les réseaux optiques.

2.2 Le multiplexage en longueur d'onde

Les techniques de multiplexage permettent d'exploiter une plus large bande passante de la fibre que celle qu'utilise un seul émetteur. Elles consistent à mélanger plusieurs flux d'information qui seront transmises sur la même fibre. La juxtaposition des flux peut se faire temporellement sur une même onde (multiplexage temporel): l'onde est découpée en périodes de courte durée, sur lesquelles chaque flux est codé. La modulation de l'onde pendant cette durée se fait selon le flux d'information correspondant. Ce type de multiplexage trouve ses limites dans le coût prohibitif des équipements et dans la lenteur des systèmes optoélectroniques existants.

Le multiplexage en longueur d'onde consiste à juxtaposer plusieurs ondes de longueur d'onde différente sur la même fibre. La modulation d'une onde se fait de la manière classique. Les ondes sont ensuite multiplexées et démultiplexées par des systèmes optiques passifs s'apparentant au prisme. L'avantage de ce type de multiplexage est qu'il n'est pas tributaire de la vitesse des équipements électroniques. Cependant le nombre

de longueurs d'onde qu'une fibre peut transporter est borné même s'il a augmenté de façon surprenante ces dernières années : d'une dizaine de longueurs d'ondes il y a quelques années, on est passé à plusieurs centaines de longueurs d'onde.

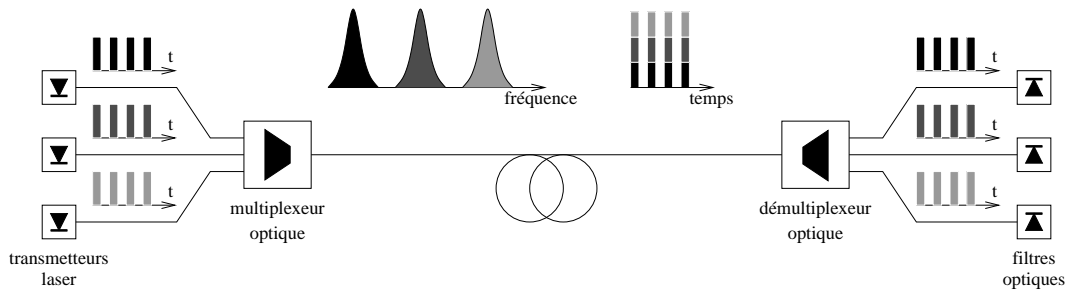


Figure 1: La technique de multiplexage en longueur d'onde.

Les réseaux optiques sont pour la plupart en mode connecté. C'est pour cette raison que lorsqu'un émetteur veut se mettre en communication avec un récepteur, un chemin à travers le réseau doit être assigné à la communication. Le chemin décrit une suite de fibres allant de l'émetteur au récepteur. La communication est alors parfaitement déterminée si la longueur d'onde utilisée sur chaque fibre pour la communication est connue. Cet ensemble de données constitue le routage de la communication. Et l'affectation de longueurs d'onde doit satisfaire une contrainte forte : deux chemins utilisant la même fibre ne doivent pas utiliser la même longueur d'onde. Dans le cas contraire, les signaux se brouilleraient mutuellement et les informations qu'ils transportent seraient perdues.

Certains routeurs permettent de faire de la conversion de longueur d'onde et donc permettent à un chemin qui rentre dans le nœud avec une certaine longueur d'onde d'en ressortir avec une autre. On peut distinguer deux types de schéma de conversion : la *conversion totale* où un chemin utilisant une longueur d'onde quelconque en entrée peut ressortir avec n'importe quelle autre longueur d'onde (toujours sous contrainte qu'il n'y ait pas deux chemins utilisant la même longueur d'onde dans la même fibre), et la *conversion partielle* où une longueur d'onde particulière ne peut être convertie qu'en une longueur d'onde appartenant à un ensemble dépendant de la longueur d'onde de départ.

Ces deux types de routeurs existent, mais coûtent très cher et donc, dans la suite de notre travail, nous considérerons qu'aucune conversion de longueur d'onde n'est autorisée, c'est-à-dire qu'à un chemin est affecté une seule longueur d'onde qui est utilisée sur toutes les fibres qu'il emprunte.

En théorie, une fibre peut-être parcourue par un signal dans les deux sens. Cependant, les fibres des réseaux sont en pratique unidirectionnelles pour des raisons technologiques au niveau des nœuds. Comme le coût d'une fibre supplémentaire entre deux nœuds est minime, les réseaux sont la plupart du temps symétriques. Nous considérerons par la suite des réseaux multifibres symétriques, ayant le même nombre de fibres entre chaque lien. Cette commodité reste proche de la réalité, puisque les fibres sont regroupées selon des câbles de tailles standardisées. Un tel réseau où k fibres relient chaque nœud est nommé réseau k -fibres.

2.3 Routage optique

Dans le cas des réseaux optiques WDM, on appelle *demande de communication* un couple (émetteur, récepteur) qui doit être connecté par un chemin dans le réseau. Un multi-ensemble de demandes de communication est appelé une *instance de communication*.

Réaliser une instance de communication consiste à trouver un routage optique, i.e. un multi-ensemble de chemins reliant chaque demande de communication de l'instance et une affectation de longueurs d'onde à ces chemins, et que ce routage soit valide, c'est-à-dire qu'il respecte la contrainte des réseaux WDM : deux chemins traversant une même fibre, ne peuvent pas se voir affecter la même longueur d'onde.

Dans ce contexte, le problème que les opérateurs voudraient résoudre est le suivant : étant données la topologie d'un réseau (c'est-à-dire l'ensemble des nœuds et des câbles reliant ces nœuds) et une instance de communication, trouver le réseau le moins cher tel qu'il soit possible d'y réaliser l'instance.

Le coût d'un réseau optique WDM k -fibres est influencé par deux paramètres. Le nombre de fibres par câbles, k , influe d'une part sur le coût de ces câbles, d'autre part sur la complexité, et par conséquent, sur le coût des routeurs (nombres de ports, taille des commutateurs, etc). Le nombre de longueurs d'onde nécessaire pour réaliser une instance de communication influe d'une part sur le coût individuel de chaque fibre (toutes les fibres ne sont pas capables de faire transiter le même nombre de longueurs d'onde) et donc sur le coût des câbles et d'autre part sur la complexité des routeurs (différents types d'équipement, nombre de prismes, etc.).

Par ailleurs, il est évident que plus on utilise de fibres, plus le nombre de longueurs d'onde nécessaire est petit et vice versa. Optimiser le coût d'un réseau revient donc à optimiser un problème bi-critères, ce qui est impossible sans connaître le rapport entre le coût d'une longueur d'onde et celui d'une fibre. Nous étudions donc le problème de décision associé.

Le problème de décision du *routage optique* est de savoir s'il est possible de réaliser une instance de communication donnée dans un réseau, en utilisant au plus des quantités de fibres par lien et de longueurs d'onde données.

S'il est possible de résoudre ce problème de manière efficace, alors tous les problèmes d'optimisation qui se fondent sur cette question pourront l'être.

2.4 Modélisation

La modélisation d'un réseau en termes de graphes est très classique. C'est d'autant plus vrai dans le contexte des réseaux optiques WDM où l'on manipule des chemins et des couleurs (les longueurs d'ondes) et la plupart des résultats d'optimisation de réseaux optiques sont issus de résultats de la théorie des graphes.

Définition 1 *Un réseau est un multi-graphe $G = (V, E)$ orienté, où il y a un sommet pour un nœud du réseau et un arc entre deux sommets pour une fibre entre les deux nœuds correspondants.*

Un réseau k -fibres peut être également modélisé comme un graphe simple adjoint du paramètre k .

Une instance de communication sur le réseau se représente par des paires de sommets.

Définition 2 *Instance de communication*

Une instance de communication dans G est un multiensemble I de paires d'éléments de V comprenant une paire (x, y) pour toute requête allant du nœud représenté par x au nœud représenté par y .

Nous définissons également un type particulier d'instance de communication, le multicast, où toutes les requêtes ont le même émetteur.

Définition 3 *Un multicast issu du sommet s dans G est un multiensemble $M_s = \{(s, y) | y \in V\}$, $s \in V$.*

Remarque 2.1 *Une instance de communication sur G se décompose de manière unique en union de multicast issus de sommets différents. $I = \bigoplus_{s \in V'} M_s$, $V' \in V$.*

Dans ce modèle, le problème de décision du routage optique se définit ainsi.

Définition 4 *Problème de décision du routage optique*

Entrée : Un multi-graphe G , une instance de communication I dans G et un nombre de longueurs d'onde n .

Sortie : Décider s'il est possible de satisfaire l'instance de communication en utilisant au plus n longueurs d'onde.

Ce problème de décision a été abondamment traité dans le cadre des réseaux monofibre ($k = 1$), mais ne l'a pas été dans le cadre des réseaux multifibres. Dans ce type de réseaux, les études principales portent sur le problème de la *planification* qui consiste à trouver une affectation valide de longueur d'onde à un multi-ensemble de chemins.

2.5 État de l'art

Les nombreux résultats qui existent dans la littérature concernent pour la plupart les réseaux monofibres (ou 1-fibres), les réseaux k -fibres n'ayant été étudiés que récemment.

Il a notamment été prouvé que les problèmes d'optimisation des réseaux monofibres sont très difficiles : le routage optique est \mathcal{NP} -difficile dans le cas général [EJ97] et même non-approximable¹[Jar99], à moins que le nombre de requêtes soit borné. Le problème est alors polynômial [RS95, Jar99]. Le problème de la planification semble plus "facile" à résoudre puisqu'il n'y a pas de routage à faire. Il reste pourtant \mathcal{NP} -difficile et non approximable dans les graphes généraux car il est équivalent au problème de coloration des sommets d'un graphe dans le cas monofibre [Bea00] et à la coloration dite k -tolérante des hypergraphes dans le cas des réseaux k -fibres [Riv01, FPR⁺01].

Le cas général est donc difficile à résoudre. Pour cette raison, des études ont été menées sur des graphes particuliers et des instances spécifiques. Si dans certains cas le problème devient simple, il reste difficile dans des cas qui semblent pourtant très simples:

- Le routage optique est \mathcal{NP} -difficile dans les arbres orientés symétriques, même binaires [EJ97]. Le problème du routage optique dans ce cas équivaut au problème de la planification.
- Le problème de planification est \mathcal{NP} -difficile dans les cycles et arbres non-orientés, même de hauteur 1 (les étoiles) [GJ85].
- Le routage optique est polynômial dans les étoiles orientées symétriques [Bea00].
- Le routage optique d'une instance *multicast* (un seul émetteur, plusieurs récepteurs) est polynômial quelque soit le réseau [Bea00].
- Le routage optique d'une instance *All-to-All* est \mathcal{NP} -difficile en général, mais polynômial pour de nombreux types de réseaux tels que les arbres, les cycles, etc [Bea00, BCCT00].
- Le routage optique dans les étoiles non-orientées k -fibres est polynômial dès que $k \geq 2$ mais reste \mathcal{NP} -difficile dans les cycles à 2 fibres [MS00, LS00].
- Pour tout réseau, il existe une valeur k^* telle que toute instance de communication ait un routage optimal dès qu'il y a k fibres par lien avec $k \geq k^*$. Cependant le calcul de k^* est \mathcal{NP} -difficile en général. $k^* = O\left(\frac{n!}{(n/2)!}\right)$ pour un cycle à n sommets [MS01].

Dans la suite, nous étudions le routage optique dans les réseaux k -fibres. Nous le réduisons à un problème de *multiflot entier* dans un graphe auxiliaire. Nous étudions ensuite des heuristiques aléatoires d'approximation de ce multiflot.

¹Un problème est dit non approximable s'il n'existe pas, pour tout $\epsilon > 0$, d'algorithme polynômial permettant d'approcher la solution à moins d'un facteur ϵ .

3 Flots et routage optique

Une approche pour résoudre le problème du routage optique consiste à se ramener à un problème de flot. Cette méthode est utilisée dans [Bea00] pour montrer divers résultats sur les réseaux 1-fibres, notamment lorsque l'instance de communication est un multicast, c'est-à-dire que l'ensemble des requêtes de cette instance ont une même source. Nous utilisons ici une méthode similaire dans le cadre des réseaux k -fibres et pour des instances multicast puis quelconques.

3.1 Problèmes de flot

Les problèmes de flot sont des problèmes fondamentaux et très souvent utiles dès qu'il s'agit de trouver des chemins dans des graphes. Ils se divisent en deux catégories, le *simple flot* et le *multiflot*.

3.1.1 Simple flot

Un problème de simple flot prend en entrée un graphe où chaque arc a une capacité, et deux sommets particuliers, la *source* et le *puits*. Le problème qui se pose alors est analogue à un problème de tuyauterie: le graphe représente un réseau de tuyaux, avec une source et un puits. Il s'agit de déterminer de quelle manière un fluide injecté dans le réseau par la source avec un certain débit va s'écouler dans les tuyaux jusqu'à sortir par le puits.

Chaque tuyau a une capacité qui est le débit maximum du fluide qui peut le traverser. L'écoulement doit donc respecter des *contraintes de capacité* sur chaque arc. Enfin, suivant le célèbre principe de conservation de la matière : *rien ne se perd, rien ne se crée*, au niveau des bifurcations des tuyaux (les noeuds du réseau), autres que la source ou le puits, la quantité du fluide qui arrive est égale à celle qui part, ce qui forme des *contraintes de conservation de flot*. Au niveau de la source et du puits les mêmes contraintes de conservation s'appliquent à ceci près qu'il faut prendre en compte l'arrivée du flot à la source et sa disparition au puits.

Un problème de flot peut se formaliser par un programme linéaire. Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de capacité sur les arcs, d la quantité de flot à transporter, s le sommet représentant la source et t le sommet représentant le puits. Il s'agit de trouver une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant les contraintes suivantes :

- contrainte de capacité : $\forall \{x, y\} \in E :$

$$0 \leq f(x, y) \leq c(x, y)$$

- contrainte de conservation : $\forall y \in V \setminus \{s, t\} :$

$$\sum_{\{x|(x,y) \in E\}} f(x, y) - \sum_{\{x|(y,x) \in E\}} f(y, x) = 0$$

- respect de la demande :

$$\sum_{\{y|(s,y) \in E\}} f(s, y) - \sum_{\{y|(y,s) \in E\}} f(y, s) = - \sum_{\{y|(t,y) \in E\}} f(t, y) + \sum_{\{y|(y,t) \in E\}} f(y, t) = d$$

$f(x, y)$ représente la quantité de flot passant par l'arc (x, y) .

Le problème de flot étant un programme linéaire, il est évidemment polynômial si l'on considère des flots fractionnaires, c'est à dire lorsque les variables et les constantes sont réelles : $d \in \mathbb{R}^+$; $f, c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Cela dit une propriété fondamentale du simple flot est qu'il reste polynômial lorsque les variables et les constantes du problème sont entières : $d \in \mathbb{N}$; $f, c : E \rightarrow \mathbb{N}$, ce qui n'est pas le cas pour les programmes linéaires en général.

Remarque 3.1 Une unité de flot décrit un chemin de s à t . Le flot peut donc être considéré comme un ensemble de chemins pondérés entre la source et le puits satisfaisant les contraintes de capacité : la somme des poids des chemins traversant un même arc est inférieure à la capacité de cet arc.

Il existe une formulation du flot en termes de chemins et non plus de variables de flot, mais elle est beaucoup moins maniable. Cependant, il est facile de construire l'ensemble des chemins pondérés correspondant à une solution du flot décrit, comme ci-dessus, en termes de variables de flot : il suffit grosso-modo de suivre le trajet de s à t parcouru par chaque unité de flot. De même, à partir d'un ensemble de chemins pondérés, on peut récupérer la variable de flot sur un arc qui n'est que la somme des poids des chemins traversant cet arc.

Les deux formulations, variables de flot et chemins, sont donc parfaitement équivalentes, ce qui nous permet d'utiliser l'une ou l'autre pour simplifier nos raisonnements.

Plusieurs types de problèmes de flot existent, quelques exemples sont :

- le problème de la demande fixée, où il faut faire passer une quantité définie du flot. C'est le problème de décision décrit ci-dessus. Il n'y a pas de fonction objective.
- le problème du flot maximum, où il faut maximiser le flot entre la source et le puits.
- le problème du coût minimal, où la quantité du flot est fixée et où chaque arc a un coût volumique. L'objectif est de minimiser le coût du flot $\sum_{e \in E} f(e) \times \text{coût}(e)$. Par exemple, le coût d'un arc peut être sa longueur.
- ...

3.1.2 Multiflot

Le problème de multiflot est une généralisation du problème de flot. Il s'agit de faire passer plusieurs flots simultanément dans le réseau entre plusieurs couples (source, puits). Les flots peuvent être considérés comme des fluides "non miscibles" dans l'analogie précédente : il y a conservation de chaque flot indépendamment des autres. Toutefois il ne s'agit pas de plusieurs simple flots "parallèles" car la contrainte de capacité est globale : la somme des flots traversant un arc ne doit pas excéder sa capacité.

On note s_l la source du flot l , t_l le puits du flot l et d_l la quantité du flot l que l'on désire faire passer. Il s'agit de trouver pour chaque flot l une fonction f_l satisfaisant les contraintes suivantes :

- contraintes de capacité : $\forall \{x, y\} \in V :$

$$0 \leq \sum_l f_l(x, y) \leq c(x, y)$$

- contraintes de conservation : $\forall l, \forall y \in V \setminus \{s_l, t_l\} :$

$$\sum_{\{x | (x, y) \in E\}} f_l(x, y) - \sum_{\{x | (y, x) \in E\}} f_l(y, x) = 0$$

- respect de la demande : $\forall l :$

$$\sum_{\{y | (s_l, y) \in E\}} f_l(s_l, y) - \sum_{\{y | (y, s_l) \in E\}} f_l(y, s_l) = - \sum_{\{y | (t_l, y) \in E\}} f_l(t_l, y) + \sum_{\{y | (y, t_l) \in E\}} f_l(y, t_l) = d_l$$

$f_l(x, y)$ représente la quantité du flot l passant sur l'arc (x, y) .

La résolution du programme linéaire est bien entendu polynômiale pour le multiflot fractionnaire, mais devient \mathcal{NP} -complet pour le multiflot entier ($\forall l, f_l : E \rightarrow \mathbb{N}, d_l \in \mathbb{N}, c : E \rightarrow \mathbb{N}$).

3.2 Réduction du routage optique au multiflot

Le problème du routage optique se réduit en un problème de multiflot entier en passant par un graphe auxiliaire. Cette réduction utilise la modélisation par un simple graphe des réseaux optiques et est fondée sur la décomposition de l'instance. Comme nous l'avons vu ci-dessus, une instance de communication I se décompose en une collection de multicast $M_s = \{(s, y) | (s, y) \in I\}$, de telle manière que deux multicast de la collection ne soient pas issus du même sommet. Un multicast est associé à un flot. Ainsi l'instance I est associée à un multiflot.

3.2.1 Cas du multicast

Le graphe auxiliaire $G_{k,c}$ pour une instance multicast M_s dépend du nombre de fibres k et du nombre de couleurs c . Il est le support du problème de flot. Il est commode de supposer que M_s est un ensemble et non un multiensemble. Une transformation simple du graphe permet dans le cas où M_s est un multiensemble de se ramener à un ensemble. En effet, si une paire (s, y) est en double dans M_s , en créant un nouveau sommet y' , un arc reliant y à y' et en remplaçant une des deux requêtes concernées par (s, y') , nous éliminons ainsi une requête en double. Le problème obtenu est équivalent pour le routage optique car l'ajout ou la suppression de sommets ou d'arcs n'entre pas en compte dans le problème de décision (au contraire de problèmes de coût par exemple). En répétant le procédé, le problème du routage dans un graphe sur un multicast représenté par un multiensemble est ramené à un problème où le multicast est un ensemble.

Supposons que le nombre de couleurs c soit égal à 1. Le graphe auxiliaire de flot $G_{k,1}$ à comme ensemble $V_{k,1}$ tous les sommets de V et $E_{k,1}$ contient tous les arcs de E . La capacité est une fonction constante égale à k . Si c est supérieur à 1, alors on fait c copies G_i de ce graphe. Nous désignerons le sommet correspondant à x dans G_i par x^i . Le graphe auxiliaire $G_{k,c}$ est construit de la façon suivante. $V_{k,c} = \bigcup_{i=1}^{i=c} V_i$ et $E_{k,c} = \bigcup_{i=1}^{i=c} E_i$. On introduit le sommet S dans V , représentant la source, et dans $E_{k,c}$ les c arcs (S, s^i) de capacité infinie. Pour chaque requête (s, y) , on introduit le sommet t_y dans $V_{k,c}$, et dans $E_{k,c}$ les c arcs (y^i, t_y) de capacité 1. Enfin, on introduit dans $V_{k,c}$ un sommet T représentant le puits, et dans $E_{k,c}$, pour chaque sommet t_y , les arcs (t_y, T) de capacité 1.

Un exemple de construction du graphe auxiliaire est donné par la figure 2. Le multicast est composé de trois requêtes représentées par les différents formes de pointillés sur la figure de gauche. La figure de droite présente le graphe auxiliaire pour trois couleurs et un nombre de fibres $k > 1$, ainsi qu'une solution du problème de flot.

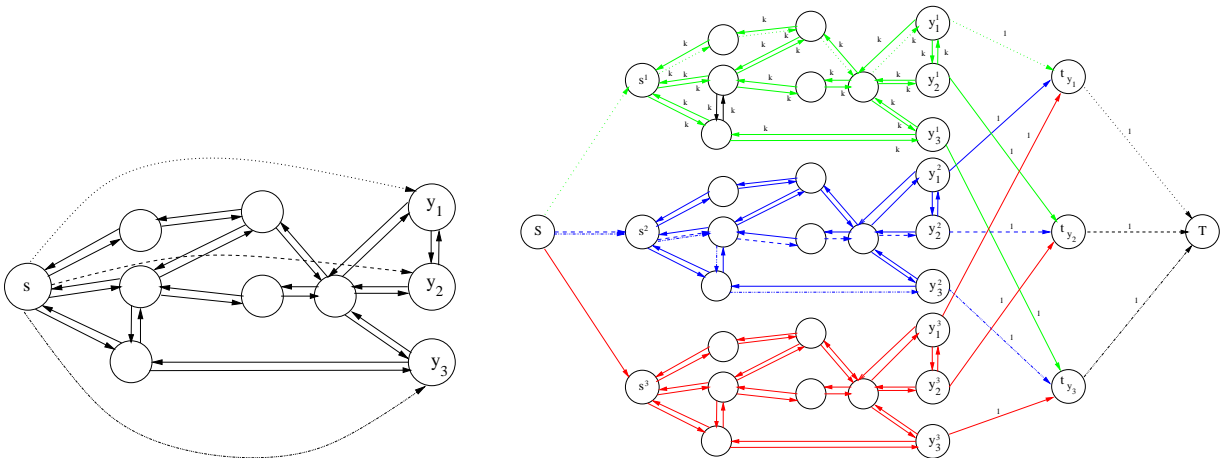


Figure 2: Une instance multicast et une solution du flot pour $k > 1$ fibres et 3 couleurs.

Dans la suite, nous noterons par $\gamma_i(s, y)$ le chemin de S à T passant par t_y et par G_i , la copie de G associée à la couleur i . On peut remarquer que $\gamma_i(s, y)$ décrit dans G un chemin de s à y .

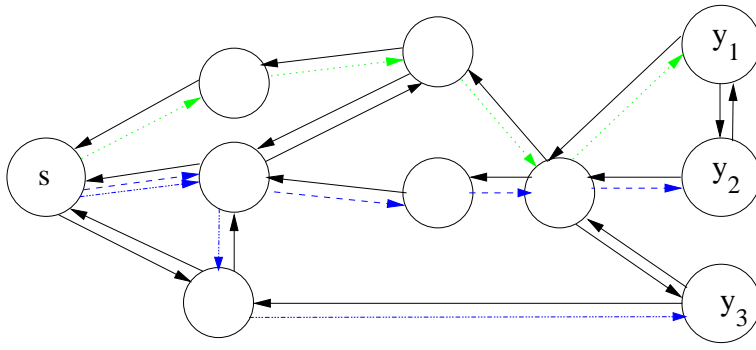


Figure 3: Solution construite à partir du flot

Proposition 1 *Pour une instance multicast M_s sur le graphe G , il existe un routage de (G, M_s) utilisant au maximum c couleurs si et seulement si $G_{k,c}$ admet un flot entier de quantité $|M_s|$ entre la source S et les puits T .*

Preuve : Supposons qu'il existe un routage de (G, M_s) utilisant c couleurs. Considérons une requête $(s, y) \in M_s$ et le chemin $\gamma_i(s, y)$ correspondant au routage. Dans le graphe auxiliaire $G_{k,c}$, le chemin se réalise dans la copie G_i du graphe G , et il constitue pour $G_{k,c}$, en ajoutant au début du chemin le sommet S et à la fin t_y et T , un flot de valeur 1. La contrainte de conservation est respectée : sur un sommet x^i appartenant à ce chemin, différent de la source et du puits, une unité de flot entrant ressort vers le prochain sommet du chemin.

Le fait que nous ayons un routage implique que par un arc passent au plus k chemins associés à la même couleur. Donc sur un arc d'une copie G_i , il n'y a pas plus de k unités de flot qui passent.

Pour les sommets de $G_{k,c}$ correspondant à un destinataire y de G , un seul reçoit du flot, celui correspondant à la couleur du chemin. Une unité de flot passe alors entre lui et t_y . Ainsi chaque t_y reçoit une unité de flot, et donc T reçoit autant d'unités de flot qu'il y a de destinataires, soit $|M_s|$ unités de flot.

Inversement supposons qu'il existe un flot de quantité $|M_s|$ entre S et T . Du fait de la contrainte de capacité qui veut que sur chaque arc (t_y, T) il y ait au plus une unité de flot, et du fait que le cardinal de $|M_s|$ est égal au cardinal de l'ensemble des t_y , on en déduit, grâce à la contrainte de conservation, que chaque sommet t_y reçoit une unité de flot. Comme le flot est entier, il ne peut provenir pour chaque t_y que d'une copie G_i . A ce flot correspond un chemin dans G affecté de la couleur donnée par le numéro de la copie. Pour chaque requête (s, y) , un chemin associé à une couleur est ainsi construit dans G . Le flot respecte la contrainte de capacité, donc sur un arc d'une copie G_i il n'y a pas plus de k unités de flot qui passent, et pour cette raison, il n'y a pas plus de k chemins ayant la même couleur qui passent par l'arc correspondant dans G . Nous obtenons ainsi un routage de (G, M_s) . □

La figure 3 représente la solution au problème du routage optique construite à partir du flot figuré sur la figure 2 ($k > 1, c = 3$).

3.2.2 Cas général

Nous considérons une instance de communication $I = \bigoplus_{l=1}^{l=L} M_{s_l}$. La construction précédente est généralisée de la manière suivante. Pour chaque multicast l , un graphe auxiliaire $G_{l,k,c}$ est construit. Le graphe auxiliaire $G_{k,c}$ est l'union de ces graphes. Par graphe $G_{l,k,c}$ il y a une source S_l , un puits T_l et un flot f_l .

La figure 4 représente un exemple de graphe auxiliaire dans le cas général. Chaque forme de pointillé représente un multicast. Nous avons représenté sur la première copie les requêtes de l'instance.

Proposition 2 *Pour une instance I sur le graphe G , il existe un routage de (G, I) utilisant au maximum*

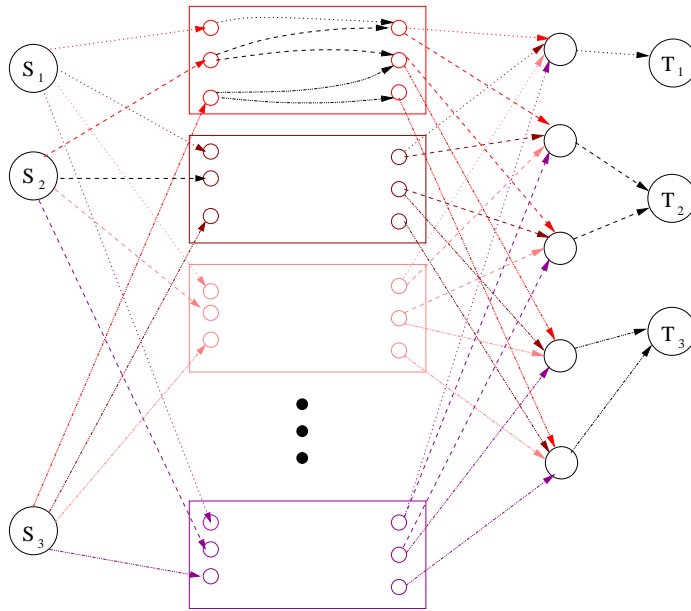


Figure 4: Graphe auxiliaire d'une instance générale.

c couleurs si et seulement si $G_{k,c}$ admet un multiflot entier, tel que le flot f_i partant de S_i et ayant comme puits T_i ait une quantité correspondant au cardinal du multicast associé.

Preuve : Supposons qu'un routage de (G, I) existe. Chaque multicast est traité comme précédemment. Nous obtenons un ensemble de flots suivant les chemins du routage affectés à des copies dans $G_{k,c}$ selon leur couleur. Les puits T_i reçoivent un flot de quantité égale au cardinal du multicast qui leur est associé. Les contraintes de conservation sont respectées, il suffit de considérer chaque flot séparément et de se ramener au cas du multicast. La contrainte de capacité est aussi respectée, pour la même raison que précédemment : il n'y a pas plus de k chemins ayant la même couleur qui passent par un même lien dans G . La quantité totale des flots qui passe par un arc de $G_{k,c}$ n'excède donc pas k . Le multiflot voulu est construit.

Supposons qu'un multiflot passe dans $G_{k,c}$. Un flot détermine un ensemble de chemins, qui rapportés dans G , satisfont un multicast de I . Ainsi I est satisfait par l'ensemble des chemins déterminés à partir du multiflot. La contrainte de capacité est respectée, comme précédemment. La somme des quantités de flots passant par un arc est plus petite que k , donc il n'y a pas plus de k chemins de même couleur qui passent par un même arc. Le problème du routage est résolu avec au maximum c couleurs. \square

Bien que les problèmes de multiflot soient en général \mathcal{NP} -complets, l'intérêt de la réduction du routage optique à un problème de multiflot est double. D'une part il existe des logiciels capables de résoudre en temps raisonnable des instances du multiflot de taille peu importante mais qui, grâce au perfectionnement des programmes et à l'augmentation de la puissance des ordinateurs, grandit régulièrement. D'autre part le multiflot est très maniable lorsqu'il s'agit de construire des solutions approchées.

4 Approximations

Dans le cas général, le problème du routage optique et les autres problèmes qui en découlent sont \mathcal{NP} -complets. Il faut donc chercher une approximation du problème. Nous avons travaillé sur des approximations construites à partir de la résolution du multiflot fractionnaire qui est, en général, un bon guide pour construire une solution entière performante.

Ce chapitre présente dans une première partie la méthode d'approximation que nous avons étudié et qui s'appuie sur l'arrondi aléatoire. Elle consiste à partir de la résolution du multiflot en fractionnaire, qui est

polynômial, à trouver une solution entière. Nous présentons ensuite trois méthodes pour optimiser cette solution.

4.1 Arrondi aléatoire

La sortie du programme linéaire pour une capacité k et un nombre de couleurs c résolu en fractionnaire nous donne un ensemble de chemins qui correspondent à des flots fractionnaires. Nous appellerons le poids fractionnaire d'un chemin la quantité de flot du flot auquel il correspond. A une requête correspondent plusieurs chemins dont la somme des poids (compris entre 0 et 1) est égale à la taille de la requête, soit 1. Afin d'obtenir une solution réelle, nous devons faire en sorte que le flot devienne entier. Notre approximation consiste à choisir un des chemins d'une requête et à arrondir son poids en une valeur entière. Ce processus sera appelé affectation du chemin. Bien sûr, une série de tels arrondis peut provoquer un violation de la capacité du réseau. Dans ce cas, le nombre de fibres du réseau sera augmenté du nombre de fibres nécessaire, pour permettre au chemin d'être affecté sans enfreindre les contraintes. La différence entre le nombre de fibres initial et final est l'erreur induite par la relaxation du problème.

Ce problème d'arrondi existe sous une autre forme dans [MR95]. L'auteur étudie la relaxation d'un programme linéaire composé des variables $\{x_{i,0}, x_{i,1}\}$ telles que $x_{i,0} + x_{i,1} = 1$. La relaxation du programme linéaire se fait en passant en fractionnaire. Il faut ensuite arrondir chaque variable $x_{i,0}$ à 0 ou 1 et en conséquence $x_{i,1}$ à 1 ou 0. La méthode utilisée est celle de l'arrondi aléatoire. Elle consiste à faire un tirage aléatoire entre les deux variables considérées, afin de choisir celle qui sera arrondie à 1. La probabilité que ce soit la variable $x_{i,0}$ qui soit arrondie est la quantité de $x_{i,0}$ et de même pour $x_{i,1}$. L'intérêt d'utiliser cette méthode est qu'une probabilité sur l'estimation de l'erreur de la relaxation est possible, et l'approximation est bonne.

Nous allons donc adapter cette méthode à notre cas. La probabilité de choisir un chemin sera, par analogie, la valeur de son poids. Soit une valeur de k et un nombre de couleurs pour lesquels le programme linéaire admet une solution. Une solution fractionnaire existe alors dans le graphe pour ces valeurs. Pour chaque requête, l'algorithme choisit un chemin au hasard. Cela revient à arrondir aléatoirement le poids des chemins d'une même requête et à traiter les requêtes indépendamment les unes des autres.

Algorithme de l'arrondi aléatoire

1. Résolution du programme linéaire
2. Pour toutes les requêtes
 - tirage aléatoire parmi les chemins de la requête avec comme probabilité leur poids.
 - le chemin choisi est affecté (son poids est mis à 1) les autres chemins de la requête sont rejetés (leur poids sont mis à 0).

L'algorithme s'arrête dès que toutes les requêtes sont satisfaites.

Clairement, le nombre de fibres de la solution entière, k' , sera supérieur ou égal à k et il est possible de mesurer l'écart entre k' et k :

Théorème 3 *Borne sur le nombre de fibres supplémentaires*

Soit $G = (V, E)$ un réseau et I un instance de communication sur G .

La probabilité que l'arrondi aléatoire du multiflot fractionnaire dans $G_{k,c}(I)$ donne une solution nécessitant une capacité $k' \leq k + O(\sqrt{k \log |E|})$ est plus grande que $1 - \frac{c}{|E|}$.

En d'autres termes, l'arrondi aléatoire donne, avec une probabilité d'autant plus grande que k est grand, une $\sqrt{\frac{\log |E|}{k}}$ -approximation du routage optique.

Preuve : Soient \mathcal{C} l'ensemble des chemins donnés par la solution fractionnaire du programme linéaire, $\mathcal{C}_r \in \mathcal{C}$ l'ensemble des chemins correspondants à une requête r , et $\gamma_r \in \mathcal{C}_r$ un chemin de la requête r .

On note $p_\gamma \in [0, 1]$ le poids (fractionnaire) de γ dans la résolution fractionnaire du multiflot, et $\bar{p}_\gamma \in \{0; 1\}$ le poids (entier) donné par l'arrondi aléatoire.

Nous avons : $\sum_{\gamma_r \in \mathcal{C}_r} p_{\gamma_r} = 1$, et $\sum_{\gamma_r \in \mathcal{C}_r} \bar{p}_{\gamma_r} = 1$ pour une requête r .

Nous pouvons considérer les \bar{p}_γ comme des variables aléatoires issues d'un tirage aléatoire selon la loi uniforme et en utilisant les poids p_γ . Nous avons pour l'espérance $E(\bar{p}_\gamma) = p_\gamma$ et l'espérance de la somme d'une partie quelconque de \mathcal{C} est égale à la somme des espérances : $\forall C \subset \mathcal{C}, E(\sum_{\gamma \in C} \bar{p}_\gamma) = \sum_{\gamma \in C} E(\bar{p}_\gamma) = \sum_{\gamma \in C} p_\gamma$.

Considérons maintenant un arc $e \in E$. Nous avons : $\sum_{\{\gamma \in \mathcal{C} | e \in \gamma\}} p_\gamma \leq k$ et notons $k(e) = \sum_{\{\gamma \in \mathcal{C} | e \in \gamma\}} \bar{p}_\gamma$ la capacité de l'arc e nécessaire à l'écoulement du multiflot obtenu par arrondi aléatoire. Notons également $\mu(e)$ l'espérance de $k(e)$. Ainsi, $\mu(e) = E(\sum_{\{\gamma \in \mathcal{C} | e \in \gamma\}} \bar{p}_\gamma(e)) = \sum_{\{\gamma \in \mathcal{C} | e \in \gamma\}} p_\gamma(e) \leq k$. De plus $k(e)$ est le résultat de plusieurs tirages indépendants, et nous pouvons donc appliquer une borne de Chernoff.

Il vient que pour $\epsilon > 0$, $P[k(e) > (1 + \epsilon)\mu(e)] < [e^\epsilon / (1 + \epsilon)^{(1+\epsilon)}]^{\mu(e)}$.

Comme $\mu(e) \leq k$, on a $P[k(e) > (1 + \epsilon)k] < P[k(e) > (1 + \epsilon)\mu(e)] < [e^\epsilon / (1 + \epsilon)^{(1+\epsilon)}]^{\mu(e)}$.
Nous allons traiter deux cas :

1. Si $\mu(e) \geq k/2$: comme $e^\epsilon / (1 + \epsilon)^{(1+\epsilon)} \leq 1$, $P[k(e) > (1 + \epsilon)k] < \left[\frac{e^\epsilon}{(1 + \epsilon)^{(1+\epsilon)}} \right]^{k/2}$, soit pour ϵ petit,

$$P[k(e) > (1 + \epsilon)k] < e^{-\left(\frac{\epsilon^2 k}{4}\right)}.$$

2. Si $\mu(e) < k/2$: il suffit de rajouter des chemins fictifs de longueur 1 qui utilise chacun une unité de capacité sur e pour nous ramener au cas précédent.

Considérons $k' = \max_{e \in E} k(e)$. Ainsi,

$$P[k' > k(1 + \epsilon)] < c|E|e^{-\left(\frac{\epsilon^2 k}{4}\right)}$$

Par conséquent, pour $\epsilon > 2\sqrt{\frac{2 \log |E|}{k}}$, nous avons que $P[k' < k(1 + \epsilon)] > 1 - \frac{c}{|E|}$, ce qui nous permet de conclure. □

Ainsi, pour répondre à la question "est-il possible de réaliser l'instance I sur le réseau G avec c couleurs et k fibres", il faut résoudre le multiflot fractionnaire avec $\frac{k}{1 + \epsilon}$ fibres pour un certain $\epsilon > 0$ choisit convenablement, et si une solution existe tenter de l'arrondir en utilisant moins de k fibres.

4.2 Heuristiques

L'algorithme précédent est rapide, mais la solution est calculée de manière indépendante pour chaque requête. En tenant compte des chemins affectés, il doit être possible d'améliorer le facteur d'approximation. On peut aussi décider de résoudre le problème de minimisation du nombre de fibres à c fixé (multiflot de capacité minimum) puis de l'arrondir et répondre oui si l'arrondi utilise moins de k fibres et non dans le cas contraire.

4.2.1 Reroutage simple

Une première idée est de calculer la solution d'un nouveau problème de flot fractionnaire après l'arrondi aléatoire de chaque requête. De cette manière les poids des chemins utilisés par l'arrondi aléatoire d'une requête tiennent compte des choix faits auparavant. L'algorithme fonctionne de la manière suivante :

Algorithme de reroutage :

1. Résolution du programme linéaire.
2. Tirage aléatoire parmi les chemins avec comme probabilité leur poids.
3. Affectation du chemin choisi en faisant l'arrondi du programme précédent.
4. Modification du programme linéaire :
 - la requête traitée est supprimé;
 - la capacité utilisée par le chemin affecté est enlevé sur chaque arc utilisé par celui-ci.
5. Retour au 1 si des requêtes sont insatisfaites.

Cet algorithme est bien sûr beaucoup plus lent, mais il est raisonnable d'espérer obtenir des solution meilleures.

4.2.2 Capacité résiduelle

L'heuristique précédente prenait en compte les chemins déjà affectés d'une façon lente. L'idée de cette heuristique est de les prendre en compte par le simple biais des probabilités de choix d'un chemin.

Étant donnée un ensemble de chemins déjà affectés (vide au départ de l'algorithme), et la solution du multiflot, nous pouvons définir, pour tout arc e , la *capacité résiduelle* qui est la capacité laissée inutilisée sur e par le flot et les chemins déjà affectés. Si cette quantité est négative, on la considère simplement comme nulle:

$$k_R(e) = \max \left\{ k - \sum_{\{\gamma_r \in \mathcal{C}_r | r \text{ requête réalisé, } e \in \gamma_r\}} \bar{p}_{\gamma_r} - \sum_{\{\gamma_r \in \mathcal{C}_r | r \text{ requête non réalisée, } e \in \gamma_r\}} p_{\gamma_r}, 0 \right\}$$

S'il existe un arc e tel que $k_R(e) = 0$, cela signifie que l'arc en question est déjà potentiellement utilisé au maximum : il faut donc forcer certaines requêtes à ne pas utiliser cet arc.

Nous définissons aussi la capacité résiduelle d'un chemin γ comme la capacité résiduelle minimum des arcs qu'il traverse :

$$k_R(\gamma) = \min_{e \in \gamma} k_R(e)$$

Si un arc est chargé, il vaut mieux éviter de sélectionner les chemins l'utilisant, et détourner les demandes correspondantes sur d'autres chemins. Cependant, si le poids p_γ d'un chemin γ est grand, alors choisir ce chemin diminuera la capacité résiduelle des arcs qu'il traverse de manière faible. En effet la diminution de capacité résiduelle induite par le choix de γ est au plus $1 - p_\gamma$. De plus, ce chemin aura de fortes chances d'être le meilleur pour la requête à laquelle il appartient. Il faut donc qu'il soit privilégié.

Notre algorithme fonctionne de la même manière que l'arrondi aléatoire sans reroutage, à ceci près que, lors du traitement d'une requête r , la probabilité de choisir un chemin γ prend en compte la capacité résiduelle des arcs à cette étape :

$$\forall \gamma_r \in \mathcal{C}_r, P[\bar{p}_{\gamma_r} = 1] = \frac{p_{\gamma_r} \times k_R(\gamma_r)}{\sum_{\gamma'_r \in \mathcal{C}_r} k_R(\gamma'_r)}$$

Si une requête r est telle que $\forall \gamma_r \in \mathcal{C}_r, k_R(\gamma_r) = 0$, la formule précédente n'est pas définie. Lorsque ce cas se produit, cela signifie qu'il n'existe pas de chemins que l'on s'autorise à affecter à r . Il faut donc attendre que de la capacité résiduelle soit libérée le long d'un chemin de r pour pouvoir l'arrondir. L'ordre de traitement des requêtes a donc une influence forte sur la solution finale. Pour éviter qu'un ordre choisi de manière arbitraire ne donne systématiquement de mauvaises performances sur des instances particulières, l'ordre de traitement des requêtes est aléatoire.

Si à une étape de l'algorithme il n'existe plus de requête ayant un chemin de capacité résiduelle positive, soit il n'y a plus de requête à traiter et l'on a fini, soit il en reste et cela signifie que le nombre de fibres par arc est trop faible.

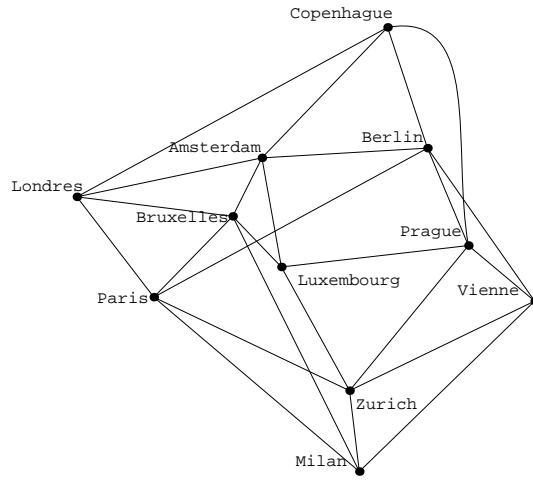


Figure 5: COST 239 : réseau européen

4.2.3 Reroutage et capacité résiduelle

Il s'agit d'associer les idées du deuxième et du troisième algorithme. Le tirage aléatoire est effectué en considérant la capacité résiduelle. Un nouveau multiflot est calculé à chaque itération. C'est le programme le plus lent, mais c'est celui qui devrait donner les meilleures solutions.

5 Résultats expérimentaux

Nous avons implémenté l'arrondi aléatoire et les heuristiques précédemment décrites dans le cadre du projet PORTO et ce afin qu'il soit, à terme, complètement intégré dans ce logiciel d'optimisation de réseaux WDM développé au sein de l'équipe MASCOTTE.

Nous avons ensuite effectué des tests afin de comparer les performances de nos heuristiques dans des situations réelles (généralement assez faciles) et théoriques (où des problèmes plus ardues peuvent apparaître).

5.1 Instances réelles

Nous comparons ici les performances des différents algorithmes présentés dans la partie précédente ainsi que celles d'un programme résolvant le problème de planification (routage fixé). Notre but est de minimiser le nombre de fibres par liens nécessaire au réseau européen COST 239 pour écouler une matrice de trafic fournie par FT R&D [Pro00] pour différentes valeurs du nombre de couleurs disponibles. Ce réseau relie 11 capitales européennes grâce à 24 liens multifibres comme le montre la Figure 5. L'instance de communication considérée comporte 176 requêtes (certaines sont présentes plusieurs fois).

c	Arrondi aléatoire		Heuristique avec reroutage		Routage fixé	
	min k	temps (sec)	min k	temps	min k	temps
1	13	4	13	4	29	< 1
2	7	5	7	10	15	< 1
3	5	4	5	14	10	< 1
9	2	14	2	96	4	< 1
15	2	10	1	377	2	2

Table 1: Tableau des résultats

Les chemins du routage fixé ont été choisis de façon aléatoire pour chaque requête entre le plus court chemin et le deuxième plus court. Le dimensionnement du nombre de fibres d'un tel réseau se réduit alors à un problème de coloration d'hypergraphe défini dans [FPR⁺01]. L'algorithme de planification est bien entendu plus rapide que les algorithmes de routage. Les résultats sont par contre bien meilleurs dans le cas où le routage n'est pas fixé.

Dans les cas testés ci-dessus, l'utilisation de la capacité résiduelle n'amène à aucune amélioration de performances. Soit il faut améliorer la distribution de probabilité pour mieux tenir compte des choix faits précédemment, soit il s'agit d'une instance de communication trop "facile" pour que cette technique ne soit utile. Cette dernière éventualité n'est pas fantaisiste : en effet on peut remarquer que les heuristiques avec et sans reroutage ne donnent des résultats distincts que lorsque le nombre de fibres nécessaire est très faible. Dans ce cas il est très probable que l'information donnée par la capacité résiduelle ne suffise pas à guider convenablement les choix de l'algorithme alors qu'elle aurait pu être efficace avec plus de fibres. Mais lorsqu'il faut beaucoup de fibres, il semble que l'arrondi aléatoire donne déjà les meilleurs résultats, ce qui peut être dû au fait que l'instance soit facile à router avec plusieurs fibres.

Ce type de phénomène a déjà été envisagé dans le cas du routage fixé : dans [FPR⁺01], les auteurs montrent que la plupart des conflits sont concentrés sur quelques arcs du réseau, ce qui entraîne un coloriage facile : une fois que les chemins en conflit sur ces arcs sont coloriés (ce qui se fait facilement du fait du faible nombre de choix possibles), les choix faits pour les autres chemins influent peu sur le nombre de fibres nécessaire.

Le fait que les heuristiques avec reroutage ne montrent leur efficacité que lorsqu'un petit nombre de fibres est nécessaire, est cohérent avec l'analyse théorique de l'arrondi aléatoire. En effet, nous avons montré que la probabilité d'avoir un écart significatif entre la solution du multiflot fractionnaire et la solution donnée par l'arrondi aléatoire est faible *quand k est grand*. Cela est dû au fait qu'une "erreur" lors de l'arrondi coûte 1 dans l'absolu, soit $\frac{1}{k}$ proportionnellement à la capacité disponible. Quand cette capacité est petite, $\frac{1}{k}$ devient significatif et une seule erreur amène à un écart important. Il faut alors plus de précision pour restreindre cet écart, ce que le reroutage apporte.

Enfin, le temps de calcul est raisonnable, même pour le reroutage (les calculs ont été effectués sur un PIII 950 MHz, avec 512Mo ram). Précisons que l'intégration de nos algorithmes dans PORTO ralentit les calculs à cause de la généricité de ce logiciel qui force à faire appel à des procédures assez lourdes. Il serait possible d'augmenter drastiquement les performances en temps de calcul en codant nos algorithmes de façon indépendante.

5.2 Couper en deux

Dans [MS01], les auteurs montrent que pour chaque réseau, il existe des ensembles de chemins dits *premiers* qui ne peuvent pas se partitionner en deux ensembles de *charge* exactement la moitié de la charge initiale. La charge d'un ensemble de chemins \mathcal{P} dans un réseau $G = (V, E)$ est le maximum sur les arcs du nombre de chemins traversant cet arc : $\pi = \max_{e \in E} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}, e \in \gamma} 1$.

Autrement dit, la charge d'un ensemble de chemins est le nombre de fibres nécessaire pour que ces chemins puissent passer sur le réseau si une couleur est disponible.

Supposons que \mathcal{P} ne soit pas un ensemble de chemins premiers pour le réseau G . Il existe donc \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 tels que $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$ et $\pi_1 = \pi(G, \mathcal{P}_1) = \pi(G, \mathcal{P}_2) = \pi_2 = \frac{\pi}{2}$. S'il est possible de colorier de manière optimale \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 avec 1 fibre par lien, alors on obtient une coloration optimale de \mathcal{P} avec 2 fibres par lien.

Imaginons maintenant que l'on soit capable de colorier \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 en c_1 et c_2 couleurs respectivement avec $c_i \leq \alpha \pi_i$ pour un α donné, on obtient alors une coloration de \mathcal{P} en $c_1 + c_2 = c$ couleurs et $c \leq \alpha \pi$, ce qui donne donc une α -approximation de la coloration de \mathcal{P} .

Nous pouvons donc essayer de faire une coloration récursive en coupant des ensembles en deux tant que l'on garde $\pi_1 + \pi_2 = \pi$. Quand on ne peut plus, on colorie les ensembles obtenus indépendamment.

Savoir s'il est possible de couper un ensemble de chemins ou une instance de communication en deux parties équilibrées est donc un problème important. Couper en deux, cela revient à trouver un routage de l'instance de communication en 2 couleurs avec un nombre de fibres minimum. Si les nombres de fibres nécessaires pour chacune des deux couleurs sont identiques et égaux au nombre de fibres nécessaire pour réaliser l'instance avec 1 couleur, alors l'instance est coupée en deux.

Nous avons testé nos heuristiques sur des arbres où le routage est unique. Les arbres testés ont été générés aléatoirement de manière à être, en moyenne, proches des pires cas de la coloration fractionnaire étudiée dans [CFK⁺01].

En effet, le multiflot fractionnaire réalise exactement la coloration définie dans cet article et il est raisonnable de penser que les cas difficiles pour la coloration fractionnaire le seront pour la partition en deux.

Nous supposons que chacun des ensembles premiers dans les arbres n'a pas une petite charge et nous nous servons de nos heuristiques pour essayer de détecter un contre exemple.

Les tests que nous avons réalisés semblent confirmer notre hypothèse puisque nous avons essayé des arbres de hauteur allant de 3 à 10 et des ensembles de chemins de charges allant de 6 à 40 sans jamais rencontrer d'ensemble premier. L'utilisation d'une heuristique de routage peut sembler étrange lorsqu'il s'agit d'opérer une séparation dans des arbres où il n'y a pas de routage à effectuer, mais les exemples que nous avons considérés deviennent vite très gros et des programmes exacts de séparation ou bien de coloration d'hypergraphes (puisque'il s'agit en fait d'un problème de planification dans un réseau à 2 fibres) sont incapables de les résoudre : ces réseaux ont plusieurs centaines de noeuds, plusieurs milliers de chemins, et le problème de séparation est \mathcal{NP} -difficile. Par contre nos heuristiques donnent des résultats de très bonne qualité puisque le nombre de fibres nécessaire est grand (on n'utilise que deux couleurs).

6 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté l'étude d'un des principaux problèmes posés par les communications optiques, le problème de l'optimisation du routage dans les réseaux optiques multifibres utilisant la technologie de multiplexage en longueur d'onde.

Nous avons dans un premier temps exposé les fondements pratiques de notre travail, et nous avons présenté la modélisation usuelle des réseaux optiques par les graphes. Nous avons également précisé le problème de décision du routage optique, qui a été le principal objet d'étude de ce stage, et présenté les résultats existants dans le domaine du WDM, selon lesquels la grande majorité des problèmes concernant les réseaux optiques sont \mathcal{NP} -complets ou \mathcal{NP} -difficiles, le routage optique n'échappant pas à cette règle.

Nous avons ensuite étudié une façon de considérer le problème du routage optique qui consiste à se ramener à un problème de multiflot entier. Cette approche permet de manipuler plus aisément notre problème grâce à une formulation algébrique en termes de la programmation linéaire.

La résolution du multiflot entier est \mathcal{NP} -complète, mais celle du multiflot fractionnaire est polynomiale et semble être un bon guide pour construire une solution du multiflot entier de bonne qualité. Nous avons présenté la technique classique d'arrondi aléatoire que nous avons améliorée grâce à différentes techniques.

L'implémentation des heuristiques que nous avons développées s'est intégrée au sein du logiciel PORTO et serviront, à terme, dans ce logiciel générique d'optimisation de réseaux optiques puisque les résultats que nous avons obtenus lors de nos tests sont très satisfaisants.

Nous avons testé ces heuristiques à la fois dans des cas réels fournis par France Télécom Recherche et Développement et nous avons obtenu des résultats meilleurs que ceux trouvés lors de travaux précédents et cadrant parfaitement avec l'analyse théorique menée.

Des prolongements sont possibles dans plusieurs directions. Sur un plan théorique, il faudrait pouvoir analyser les performances de nos heuristiques. Si les martingales semblent être la bonne technique à utiliser

pour arriver à nos fins, il faut encore résoudre certains problèmes parmi les plus difficiles, notamment borner de manière plus fine l'influence d'un arrondi sur la valeur d'un multiflot fractionnaire.

Il reste aussi à appréhender correctement le problème de la séparation en deux d'une instance de communication pour développer un algorithme aléatoire et récursif de routage optique utilisant nos heuristiques de multiflot entier.

Enfin, d'un point de vue pratique, il faut tester nos heuristiques dans d'autres cas réalistes et plus importants en taille comme le réseau pan-américain [FPR⁺01]. Par ailleurs le code de ces heuristiques, basé sur PORTO, a nécessité des adaptations du code de celui-ci. Le logiciel est donc en cours de mutation profonde pour intégrer ces modifications dans la modélisation interne des réseaux et des chemins afin de pouvoir utiliser nos heuristiques en coopération avec les algorithmes de groupage développés au sein de l'équipe MASCOTTE. Pour plus détails, le lecteur peut se reporter à [Pro00].

Enfin, il pourrait être intéressant de croiser l'analyse que nous avons faite de l'arrondi du multiflot avec celle faite sur la coloration fractionnaire dans les arbres dans [CFK⁺01] afin d'obtenir un bon algorithme de coloration des chemins d'un arbre.

References

- [BCCT00] J-C. Bermond, L. Chacon, D. Coudert, and F. Tillerot. Conception d'un réseau WDM protégé par sous-réseaux. In *Deuxième Rencontres Francophones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications – AlgoTel*, La Rochelle, France, Mai 2000.
- [Bea00] B. Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2000.
- [CFK⁺01] I. Caragianis, A. Ferreira, C. Kaklamanis, S. Perennes, and H. Rivano. Fractional path coloring on bounded degree trees. In *in the Proceedings of ICALP*, Lecture Notes in Computer Science, page To appear, Crete, Greece, July 2001. Springer-Verlag.
- [CGK92] I. Chlamtac, A. Ganz, and G. Karmi. Lightpath communications: An approach to high bandwidth optical WAN's. *IEEE Transactions on Communications*, 40(7):1171–1182, July 1992.
- [EJ97] T. Erlebach and K. Jansen. Call scheduling in trees, rings and meshes. In *30th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'97)*, volume 1, pages 221–222. IEEE Computer Society Press, 1997.
- [FPR⁺01] A. Ferreira, S. Pérennes, A. Richa, H. Rivano, and N. Stier. On the design of multifiber WDM networks. submitted to INFOCOM'02, 2001.
- [GJ85] M.C. Golumbic and R.E. Jamison. The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Comb. Theory*, 38:8–22, 1985.
- [Jar99] A. Jarry. Théorie des graphes: chemins disjoints. Rapport de stage de 1ère année, École Normale Supérieure de Lyon, July 1999.
- [LS00] G. Li and R. Simha. On the Wavelength Assignment Problem in Multifiber WDM Star and Ring Networks. *IEEE Infocom*, 2000.
- [MR95] R. Motwani and P. Raghavan. *Randomized Algorithms*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.
- [MS00] L. Margara and J. Simon. Wavelength Assignment Problem on All-Optical Networks with k Fibres per Link. In *ICALP'00*, 2000.
- [MS01] L. Margara and J. Simon. Decidable properties of graphs of all-optical networks. In *28rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 768–779, 2001.
- [Pan92] R. K. Pankaj. *Architectures for Linear Lightwave Networks*. PhD thesis, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, Cambridge, MA, 1992.
- [Pro00] Projet RNRT PORTO, Planification et Optimisation des Réseaux de Transport Optiques. INRIA Projet MASCOTTE, Alcatel Corporate Research Centre, France Telecom R&D. Document soumis à autorisation légale de France Télécom R&D, Février 2000.
- [Riv01] Hervé Rivano. Planification de réseaux optiques wdm k-fibres. In *AlgoTel'01 - 3^{èmes} Rencontres Françaises sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications*, pages 41–46, Saint Jean de Luz, France, mai 2001. INRIA.
- [RS95] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XIII. The disjoint paths problem. *Journal of Comb. Theory*, 63, 1995.