Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

I3S

CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

STRUCTURES DE MODÈLES ET PROPRIÉTÉS

Luc Pronzato, 2004

1) Identification

Système $\mathcal{S}$ (réalité physique) : entrée $u(t)$, sortie $y(t)$, perturbations (variables aléatoires) $b(t)$

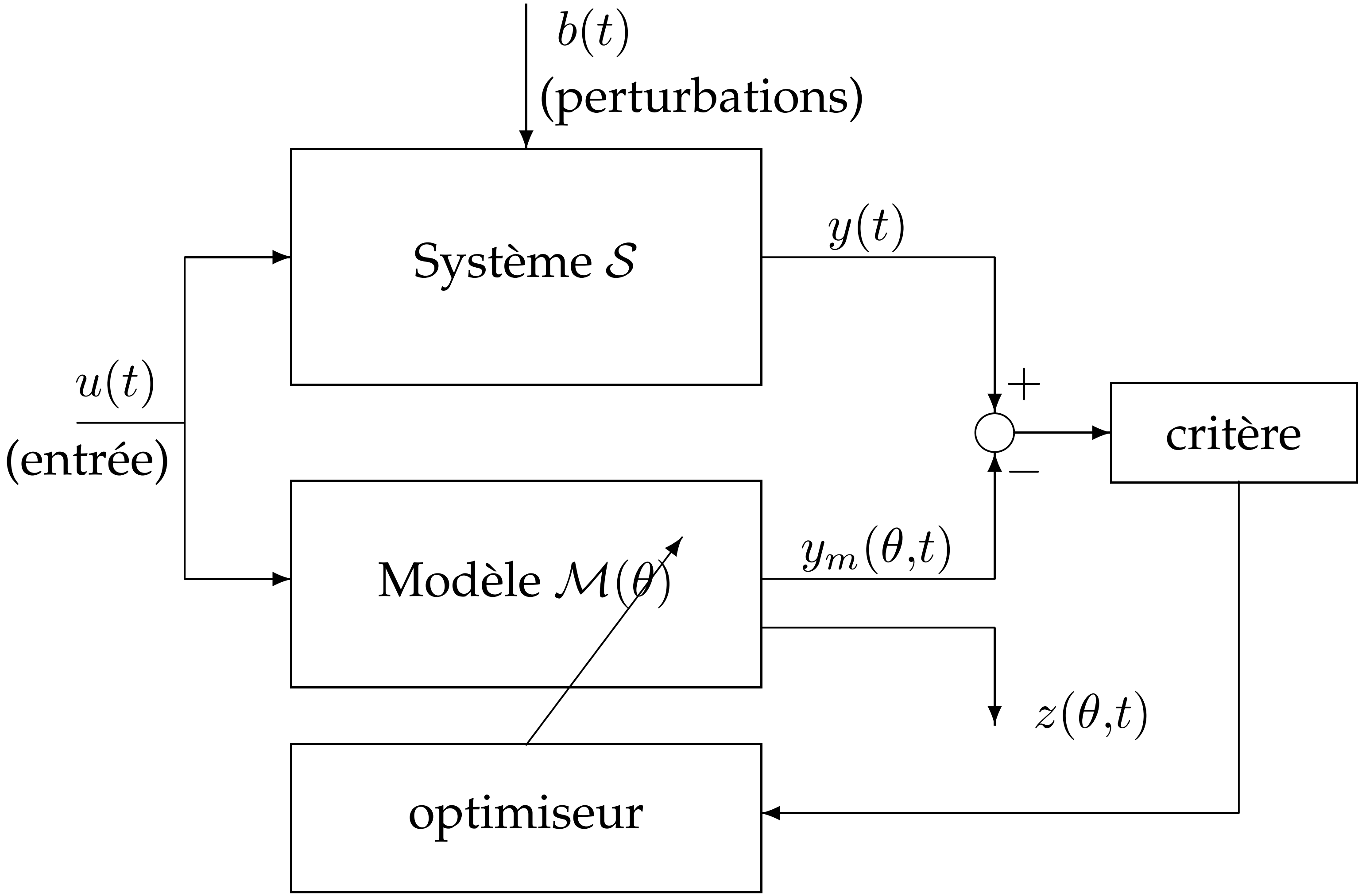
Modèle $\mathcal{M}(\theta)$ (équations mathématiques) : paramètres $\theta \in \mathbb{R}^p$, entrée $u(t)$, sortie $y_m(\theta,t)$, supposée reproduire $y(t)$

Rq1 : ici, le + souvent, 1 entrée et 1 sortie
Rq2 : éventuellement, $\exists$ aussi sorties $z(\theta,t)$, non observables sur S
Rq3 : t peut être autre chose que le temps...

Critère : ressemblance («distance») entre $y(t)$ et $y_m(\theta,t)$

Optimiseur : règle θ pour avoir la plus grande ressemblance possible

$$\begin{array}{rcl} \text{Critère} & \Leftrightarrow & \text{Estimateur} \\ \text{Optimiseur} & \Leftrightarrow & \text{Algorithme} \end{array}$$


$b(t)$
(perturbations)
Système $\mathcal{S}$
$y(t)$
$u(t)$
(entrée)
+
−
critère
Modèle $\mathcal{M}(\theta)$
$y_m(\theta,t)$
$z(\theta,t)$
optimiseur

Perturbations $\Rightarrow$ observations $y(t)$ = réalisations de variables aléatoires

$\hat{\theta}$ valeur de θ qui optimise le critère = estimée de θ

$\rightarrow \hat{\theta}$ calculé à partir de $y(t) \Rightarrow \hat{\theta} =$ variable aléatoire (moyenne, variance, etc.)

précision de l'estimation ? (voir + loin)

2) Structures de modèles

On distingue la structure $\mathcal{M}(\cdot)$ du modèle $\mathcal{M}(\theta)$, de structure $\mathcal{M}$ et de paramètres $\theta \in I\!R^p$

Choix de la structure = caractérisation

Dépend

- du but poursuivi : analyse de phénomènes (physique...), calcul de grandeurs non mesurables $z(\theta,t)$, test, diagnostic, enseignement, prédiction (à long terme ou à court terme $\rightarrow$ commande), régulation, traitement du signal (compression, filtrage, annulation d'écho...), simulation...
- des conditions d'utilisation : grands signaux/petits signaux
- des possibilités d'investigation, du coût de la construction, etc.

2.1) Modèles phénoménologiques et comportementaux

Phénoménologique (ou «de connaissance») : équations de la «physique». Exemple :

$$A \underset{\theta_2}{\overset{\theta_1}{\rightleftarrows}} B \xrightarrow{\theta_3} C\,, \quad + \quad \text{cinétique du } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

donne

$$\frac{d[A]}{dt} = -\theta_1[A] + \theta_2[B] \ldots$$

et $[A]$, $[B]$, $[C]$, θ_1, θ_2, θ_3 ont un sens physique.

Simulation : (parfois) compliquée, mais précise (bonne prédiction)

Estimation des paramètres : (parfois) difficile

Comportementaux : reproduisent seulement un comportement (polynômes, splines)

Simulation, estimation (généralement) simples, mais pouvoir prédictif très limité.

2.2) Modèles linéaires et non linéaires

LE : par rapport aux entrées $\longrightarrow$ automatique

$$y_m(\theta,t,\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 y_m(\theta,t,u_1) + \alpha_2 y_m(\theta,t,u_2)$$

LP : par rapport aux paramètres $\longrightarrow$ statistique

$$y_m(\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2,t,u) = \alpha_1 y_m(\theta_1,t,u) + \alpha_2 y_m(\theta_2,t,u)$$

LE : domaine de validité limité, étude théorique du comportement «facile» (résultats classiques : automatique linéaire)

NLE : plus réalistes, mais étude + complexe

LP : estimation de paramètres et caractérisation de la précision «faciles», surtout si critère quadratique (statistique linéaire)

NLP : estimation + difficile (statistique non linéaire)

2.3) Modèles à temps continu et à temps discret

2.3.1) Temps continu

Exemple : équations d'état

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\theta,t) \text{ , } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_m(\theta,t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\theta,t) \end{aligned}$$

Modèle LE stationnaire

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,,\, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_m(\theta,t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

(θ se trouve dans $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$ et $\mathbf{x}_0$)

$\rightarrow$ matrice de transfert

$$\mathbf{y}_m(\theta,s) = \mathbf{H}_1(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{H}_2(s)\mathbf{x}_0$$

avec $\mathbf{H}_1(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ et $\mathbf{H}_2(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
(s= variable de Laplace, $\mathbf{I}$= matrice identité)

$\rightarrow$ équations différentielles entrée/sortie

LE : changement de représentation facile

NLE : le passage représentation d'état $\rightarrow$ eq. diff. entrée/sortie peut être impossible

Simulation pas toujours facile si NLE (simulateur d'équations différentielles, Runge-Kutta)

Instants d'observation quelconques

2.3.2) Temps discret

Exemple : équations d'état

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),\theta,k) \, , \, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_m(\theta,k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),\theta,k) \end{aligned}$$

Modèle LE stationnaire

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)\,,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_m(\theta,k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

(θ se trouve dans $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$ et $\mathbf{x}_0$)

$\rightarrow$ matrice de transfert

$$\mathbf{y}_m(\theta,z) = \mathbf{H}_1(z)\mathbf{u}(z) + \mathbf{H}_2(z)\mathbf{x}_0$$

avec $\mathbf{H}_1(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ et $\mathbf{H}_2(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$
($z = \exp(-Ts)$ = transformée de Laplace de l'opérateur «décalage de T», avec T la période d'échantillonnage, **I**= matrice identité)

$\rightarrow$ équations de récurrence entrée/sortie

Rq1 : Pas d'équivalence temps continu/temps discret.
$y_m(k+1) = -\theta y_m(k) + u(k)$, $0 < \theta \leq 1$.

Rq2 : Observations à $t_k = kT \rightarrow$ les paramètres dépendent de T.
Opérateur δ:

$$\delta x(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

Rq3 : k peut être simplement le numéro de l'observation, sans référence au temps.

Rq4 : pourquoi z dans $\mathbf{H}_2(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$?
Si l'échantillon k de x (signal causal) vaut $x(k) = x_k$, alors sa transformée en z vaut

$$x(z) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k}$$

Considérons le signal y défini par $y_k = x_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned} y(z) &= y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k z^{-k} = x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} z^{-k} \\ &= x_1 + z\sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} z^{-(k+1)} = x_1 + z\sum_{k=2}^{\infty} x_k z^{-k} \\ &= z[x(z) - x_0] \end{aligned}$$

2.4) Modèles déterministes et stochastiques

Stochastiques : prennent en compte l'influence des perturbations

Ex : eq. d'état

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k)\,,\, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{v}(k)$ et $\mathbf{w}(k)$ des échantillons de «bruit» (réalisations de variables aléatoires)

Le filtrage de Kalman repose sur ce type de modèle

Mathématiques plus sophistiquées pour le temps continu (éq. diff. stochastiques)

Un outil important pour le temps discret : l'opérateur retard q^{-1}

$y = q^{-1}x$ désigne le signal à temps discret x décalé de -1: son échantillon k vaut $x(k-1)$

En fait, $q = z$, mais simple écriture formelle

On utilise des polynômes en q^{-1} pour représenter différents types de structures de modèles. Exemple :

$$A(\theta,q)y = B(\theta,q)u + b$$

$A(\theta,q)y$ est la partie autorégressive, $B(\theta,q)u$ la partie exogène, b le bruit, avec $A(\theta,q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots$, $B(\theta,q) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots$
$\rightarrow$ correspond à

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots = b_0u(k)+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b(k)$$

θ correspond aux coefficients a_i et b_i des polynômes (et on suppose souvent que $b_0 = 0$). Il faut en général estimer θ et le degré des polynômes (l'ordre du modèle) — voir + loin

La structure dépend encore des hypothèses sur b…

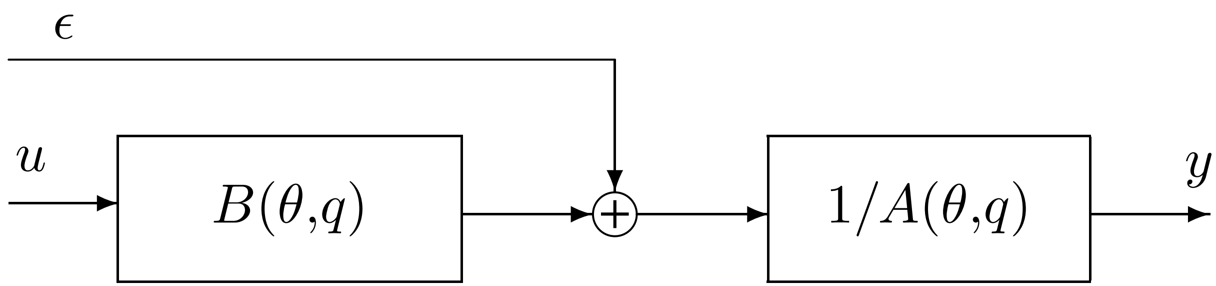
Une propriété essentielle : l'indépendance

On notera $[\epsilon(k)]_k$ ou $(\epsilon_k)_k$ une suite de v.a.i. (variables aléatoires indépendantes) [la loi conjointe s'exprime comme le produit des lois individuelles]

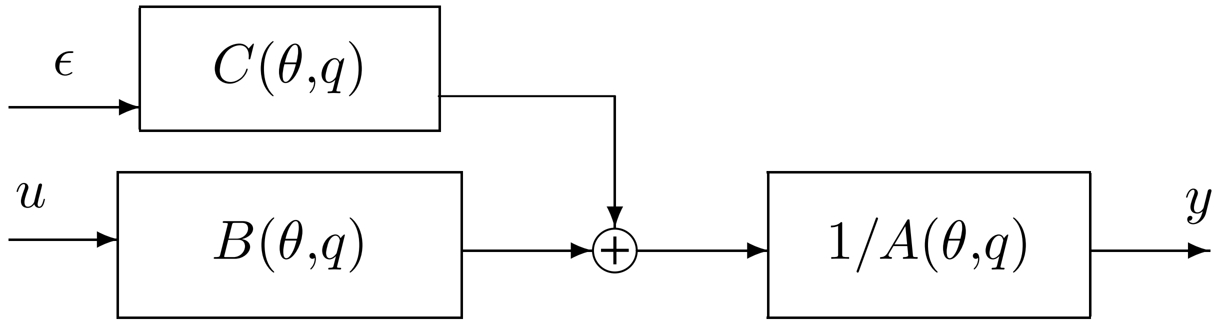
La structure $A(\theta,q)y = B(\theta,q)u + \epsilon$ est appelée ARX, $A(\theta,q)y = B(\theta,q)u + C(\theta,q)\epsilon$, avec $C(\theta,q) = c_0 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \cdots$, est appelée ARMAX [$C(\theta,q)\epsilon$ est la partie moyenne mobile, ou «*Moving Average*»]

On peut la réécrire $y = [B(\theta,q)/A(\theta,q)]u + [C(\theta,q)/A(\theta,q)]\epsilon$

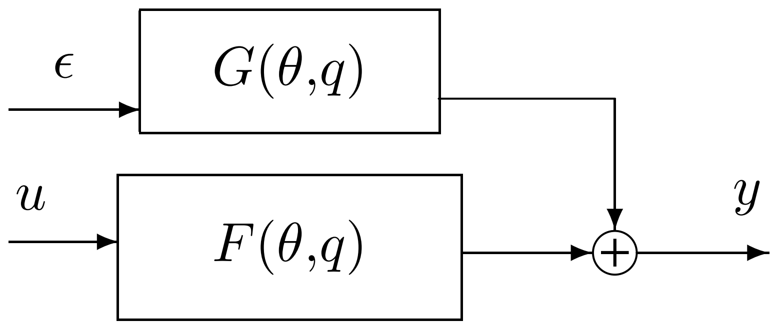
La structure la plus générale est $y = F(\theta,q)u + G(\theta,q)\epsilon$, avec F et G des fractions rationnelles en q^{-1} (structure de Box et Jenkins).



ARX



ARMAX



Box & Jenkins

2.5) Choix de la complexité

Structure + complexe : plus de degrés de liberté (+ de paramètres à règler) $\rightarrow$ description + fine de la réalité ?

Garder des données de validation ! (non utilisées pour l'estimation des paramètres)

Une structure trop complexe peut modéliser des perturbations, donner de mauvaise prédictions, manquer de robustesse, etc.

$\exists$ compromis complexité/performance (robustesse)

(voir + loin, critère AIC d'Akaike)

3) Propriétés structurelles

(structurelle = pour presque toute valeur de θ)

3.1) Identifiabilité

La question : Y a-t-il une seule valeur de $\hat{\theta}$ qui donne le comportement de $\mathcal{M}(\theta)$ le plus proche de celui de $\mathcal{S}$?

Si modèle LP: $\mathbf{y}_m(\theta) = \mathbf{R}\theta + \mathbf{c}$, avec $\mathbf{R}$, $\mathbf{c}$ connus.

$$\mathbf{y}_m(\theta_1) = \mathbf{y}_m(\theta_2) \Rightarrow \mathbf{R}\theta_1 = \mathbf{R}\theta_2$$

et $\hat{\theta}$ unique si $\mathbf{R}$ de rang plein.

Mais en général, mauvaise question !

$\longrightarrow$ cadre idéalisé :

- ☞ données générées par un modèle de structure $\mathcal{M}(\cdot)$
- ☞ pas de perturbations
- ☞ aussi riches que l'on veut (on choisit $u(t)$, observations à volonté)

Système $\mathcal{S}$ remplacé par $\mathcal{M}(\bar{\theta})$, $\bar{\theta}$ inconnu.

«meilleur modèle» $\mathcal{M}(\hat{\theta})$: tel que comportement observé pour $\mathcal{M}(\hat{\theta})$
= comportement observé pour $\mathcal{M}(\bar{\theta})$ (noté $\mathcal{M}(\hat{\theta}) \equiv \mathcal{M}(\bar{\theta})$)

La bonne question :

$$\mathcal{M}(\hat{\theta}) \equiv \mathcal{M}(\bar{\theta}) \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{\theta} \,?$$

Quelques définitions :

- Le paramètre $[\theta]_i$ est structurellement globalement identifiable (s.g.i.) si pour presque tout $\bar{\theta}$, $\mathcal{M}(\hat{\theta}) \equiv \mathcal{M}(\bar{\theta}) \Rightarrow [\hat{\theta}]_i = [\bar{\theta}]_i$. Si tous les $[\theta]_i$ sont s.g.i., $i = 1, \ldots, p$, $\mathcal{M}(\cdot)$ est s.g.i.
- Le paramètre $[\theta]_i$ est structurellement localement identifiable (s.l.i.) si pour presque tout $\bar{\theta}$, $\exists \mathcal{V}(\bar{\theta})$ tel que $\hat{\theta} \in \mathcal{V}(\bar{\theta})$ et $\mathcal{M}(\hat{\theta}) \equiv \mathcal{M}(\bar{\theta}) \Rightarrow [\hat{\theta}]_i = [\bar{\theta}]_i$. Si tous les $[\theta]_i$ sont s.l.i., $i = 1, \ldots, p$, $\mathcal{M}(\cdot)$ est s.l.i.
- Le paramètre $[\theta]_i$ est structurellement non identifiable (s.n.i.) si pour presque tout $\bar{\theta}$, $\exists$ une infinité non dénombrable de $[\hat{\theta}]_i$ tels que $\mathcal{M}(\hat{\theta}) \equiv \mathcal{M}(\bar{\theta})$. $[\theta]_i$ est s.n.i. $\Rightarrow \mathcal{M}(\cdot)$ est s.n.i.

Rq1 : s.g.i. $\Rightarrow$ s.l.i.
Rq2 : On peut avoir $[\theta]_i$ s.g.i. et $[\theta]_j$, $j \neq i$, s.n.i.

Comment tester ?

$\exists$ diverses méthodes, pour modèles LE ou NLE.

Une méthode simple pour modèles LE stationnaires : la matrice de transfert caractérise tout le comportement entrée/sortie

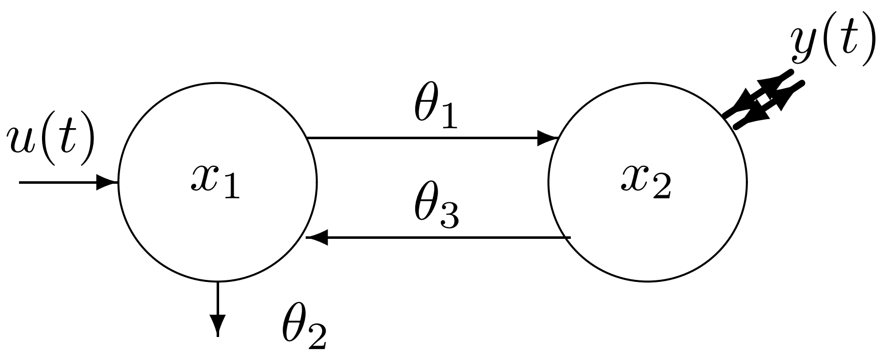
- ☞ 1) écrire la matrice de transfert
- ☞ 2) la mettre sous forme canonique
- ☞ 3) résoudre en $\hat{\theta}$: $\mathbf{H}(\bar{\theta},s) = \mathbf{H}(\hat{\theta},s)$.
  - ➽ solution unique pour $[\hat{\theta}]_i$: $[\hat{\theta}]_i$ est s.g.i.
  - ➽ l'ensemble des solutions pour $[\hat{\theta}]_i$ est dénombrable : $[\hat{\theta}]_i$ est s.l.i.
  - ➽ l'ensemble des solutions pour $[\hat{\theta}]_i$ n'est pas dénombrable : $\mathcal{M}(\cdot)$ est s.n.i.

Pourquoi forme canonique ?

Soit $\mathbf{H}(\theta,s) = \frac{\theta_1}{\theta_2+\theta_3 s}$. $\mathbf{H}(\hat{\theta},s) = \mathbf{H}(\bar{\theta},s) \not\Rightarrow \{\hat{\theta}_1 = \bar{\theta}_1, \hat{\theta}_2 = \bar{\theta}_2, \hat{\theta}_3 = \bar{\theta}_3\}$

Une possibilité : simplifier numérateur et dénominateur $\rightarrow$ coef. de + haut degré du dénominateur = 1

Exemple : Modèle de compartiment



eq. d'état associées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(t)}{dt} &= -(\theta_1+\theta_2)x_1(t)+\theta_3 x_2(t)+u(t)\,,\ \ x_1(0)=0\\ \frac{\partial x_2(t)}{dt} &= \theta_1 x_1(t)-\theta_3 x_2(t)\,,\ \ x_2(0)=0\end{aligned}$$

eq. d'observation :

$$y_m(\theta,t)=x_2(t)$$

Fonction de transfert (écriture canonique)

$$H(\theta,s)=\frac{\theta_1}{s^2+s(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\theta_2\theta_3}$$

Test d'identifiabilité :

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{M}(\hat{\theta}) \equiv \mathcal{M}(\bar{\theta})] \quad &\Leftrightarrow \quad [H(\hat{\theta},s) = H(\bar{\theta},s) \forall s] \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_1 = \bar{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3 = \bar{\theta}_2 \bar{\theta}_3 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ 2 solutions

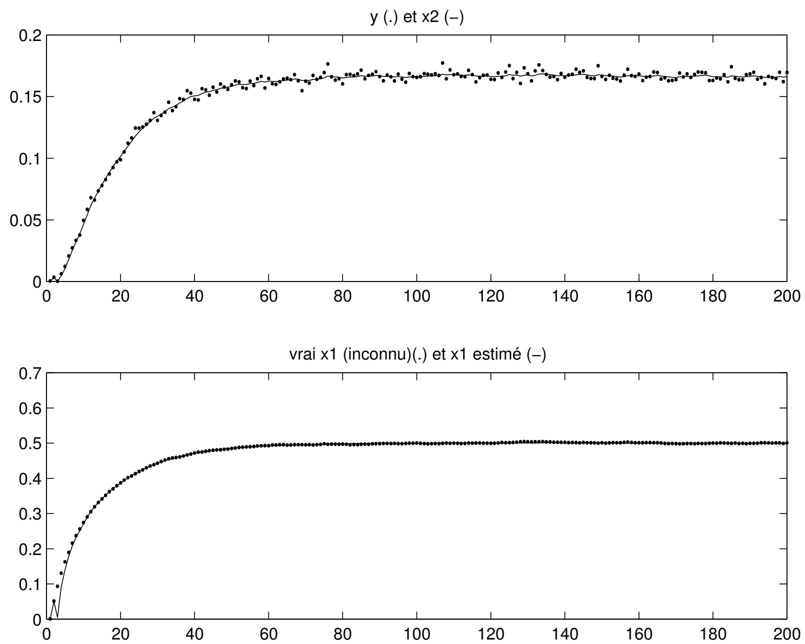
$$
\begin{aligned}
\hat{\theta} &= (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3) \\
\hat{\theta} &= (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_3, \bar{\theta}_2)
\end{aligned}
$$

θ_1 est s.g.i., θ_2 et θ_3 sont s.l.i. et $\mathcal{M}(\cdot)$ est s.l.i.

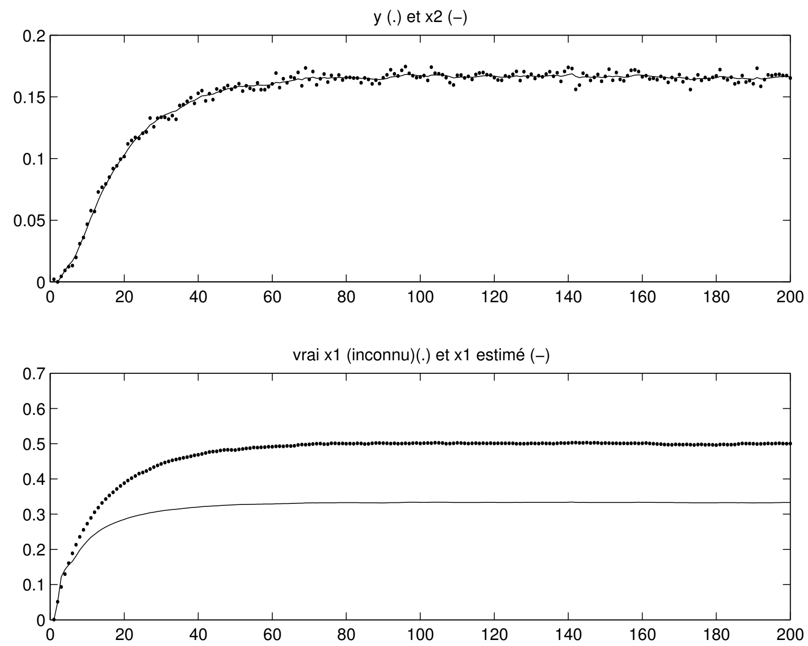
Rq 1 : Avec de vraies données, on minimise un critère de distance entre $\mathbf{y}$ (observé sur $\mathcal{S}$) et $\mathbf{y}_m(\theta)$ (réponse de $\mathcal{M}(\theta)$) $\rightarrow \hat{\theta}$. On sait obtenir une autre valeur $\hat{\theta}'$ qui donne exactement le même comportement !

Rq 2 : Si $\bar{\theta}_1 = 0$, θ_2 et θ_3 ne sont pas identifiables. Mais valeur atypique pour $\bar{\theta}_1$: les conclusions précédentes sont vraies pour presque tout $\bar{\theta}$ (mais $\exists$ situations sans conclusion structurelle, voir + loin)

Rq 3 : Important pour l'estimation de paramètres et l'estimation d'état. On n'observe pas $x_1(t)$, alors on le reconstruit (par ex., filtrage de Kalman) $\rightarrow$ 2 trajectoires possibles, et on ne peut jamais savoir ! (mais on peut savoir qu'on ne peut pas savoir…)



simulation avec $\hat{\theta} = \bar{\theta}$



simulation avec $\hat{\theta} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_3, \bar{\theta}_2)$

3.1) Discernabilité

La question : Y a-t-il une chance de trouver la bonne structure de modèle pour $\mathcal{S}$?

De nouveau, $\rightarrow$ cadre idéalisé :

- ☞ données générées par un modèle de structure $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$
- ☞ pas de perturbations
- ☞ aussi riches que l'on veut (on choisit $u(t)$, observations à volonté)

Système $\mathcal{S}$ remplacé par $\bar{\mathcal{M}}(\bar{\theta})$, $\bar{\theta}$ inconnu. On propose une structure $\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$ différente de $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$.

La bonne question : existe-t-il $\hat{\theta}$ tel que $\hat{\mathcal{M}}(\hat{\theta}) \equiv \bar{\mathcal{M}}(\bar{\theta})$?

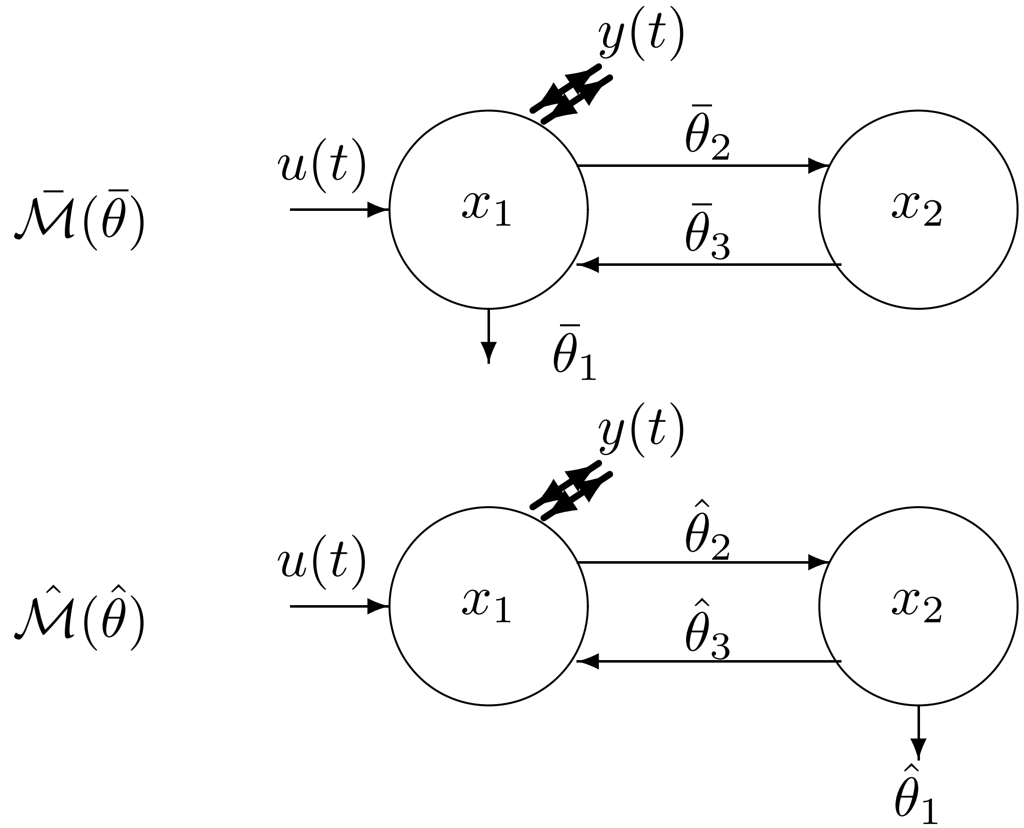
Quelques définitions :

- ❑ $\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$ est structurellement discernable (s.d.) de $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$ ssi pour presque tout $\bar{\theta}$, $\nexists\hat{\theta}$ tel que $\hat{\mathcal{M}}(\hat{\theta}) \equiv \bar{\mathcal{M}}(\bar{\theta})$.
- ❑ Si $\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$ est s.d. de $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$ et $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$ est s.d. de $\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$, on dit que $\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$ et $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$ sont s.d.

Rq : La définition de s.d. n'est pas symétrique

Même techniques que pour l'identifiabilité, mais ici on espère qu'il n'existe pas de solution (on espère une solution unique pour l'identifiabilité)

Exemple :



Tester l'identifiabilité de $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$, de $\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$ et leur discernabilité

Rq1 : Relation entre discernabilité et identifiabilité ? $\rightarrow$ conclure d'après l'exemple précédent

Rq2 : Cas de propriété non structurelle.

$$\bar{H}(\bar{\theta},s) = \frac{1}{s^2 + \bar{\theta}_1 s + \bar{\theta}_2}\,,\ \hat{H}(\hat{\theta},s) = \frac{1}{(s+\hat{\theta}_1)(s+\hat{\theta}_2)}\,,\ \bar{\theta},\hat{\theta} \in \mathbb{R}^2$$

$\hat{\mathcal{M}}(\cdot)$ est indiscernable de $\bar{\mathcal{M}}(\cdot)$ si $\bar{H}$ a deux pôles réels, est discernable sinon

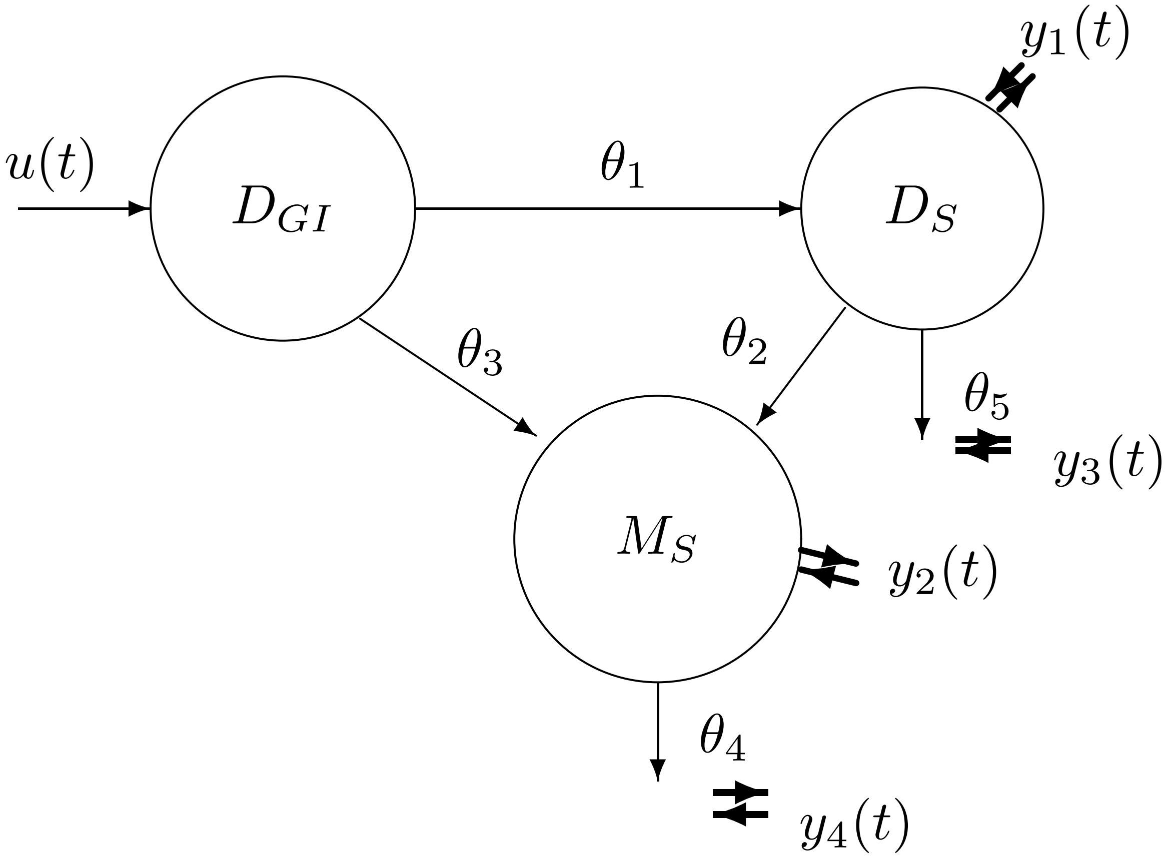
Techniques de résolution (identifiabilité & discernabilité) : Équations polynômiales $\rightarrow$ langage formel (MAPLE)

Structure NLE (et NLP) : + compliqué

En général, structures NLE «plus identifiables» que structures LE

Réponse pas triviale, même pour structures LE

Exemple :


$u(t)$
D_{GI}
θ_1
D_S
$y_1(t)$
θ_3
θ_2
θ_5
$y_3(t)$
M_S
$y_2(t)$
θ_4
$y_4(t)$

Une entrée $u(t)$: administration orale d'un médicament D

Quatre sorties :

- ☞ concentration de D dans le sang : $y_1 = \theta_6 D_S$
- ☞ concentration du métabolite M dans le sang : $y_2 = \theta_7 M_S$
- ☞ concentration de D dans les urines : $y_3 = \theta_5 D_S$
- ☞ concentration de M dans les urines : $y_4 = \theta_4 M_S$

$\rightarrow$ 7 paramètres, 15 configurations entrée/sortie possibles !

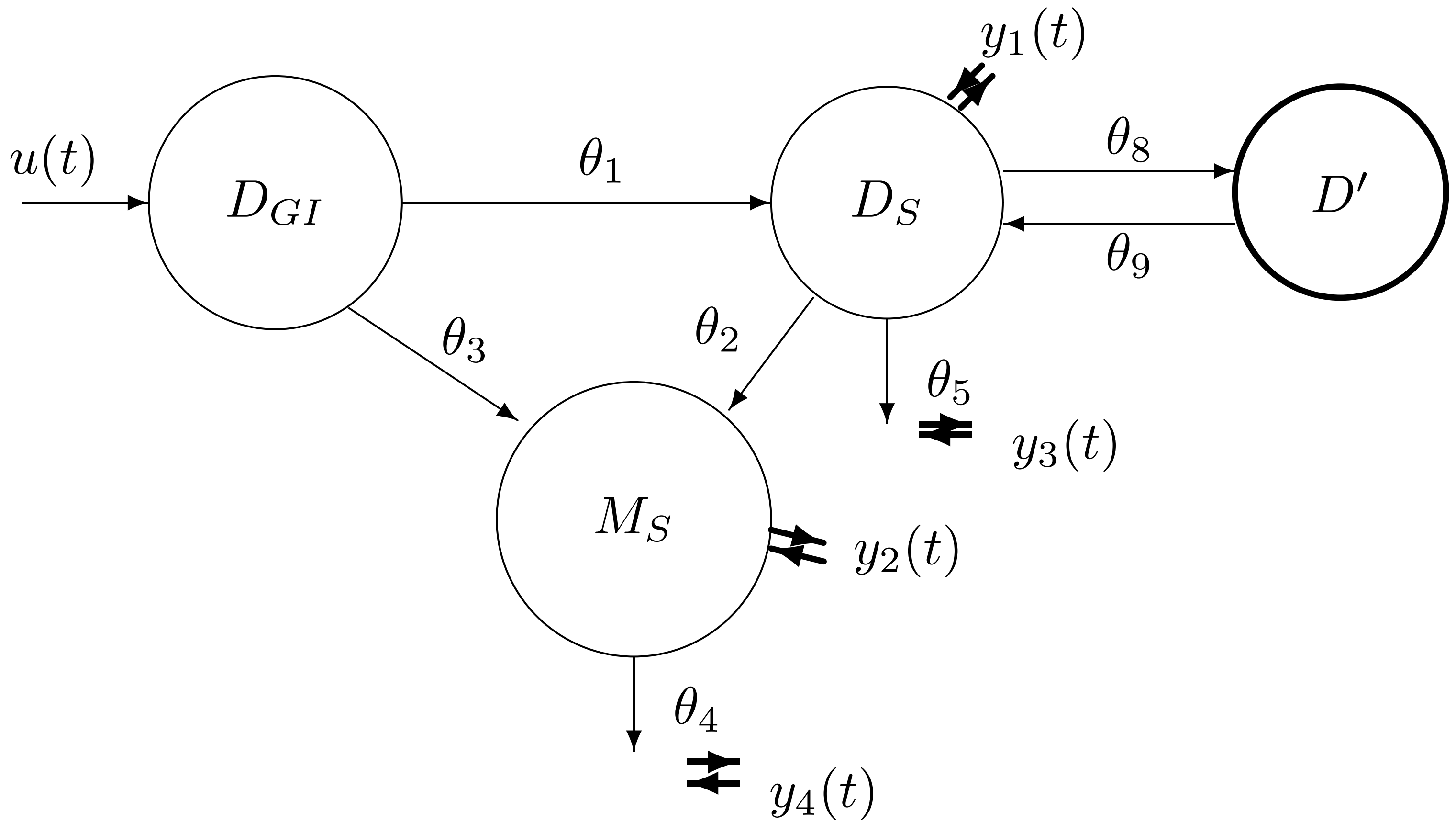
sorties	modèle	paramètres s.g.i.	paramètres s.l.i.
1	s.n.i.		
2	s.n.i.		θ_4 (3 sol.)
3	s.n.i.		
4	s.n.i.		$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5$ (6 sol.)
1 & 2	s.n.i.	θ_4	
1 & 3	s.n.i.		
1 & 4	s.n.i.	θ_2,θ_4	$\theta_1,\theta_3,\theta_5,\theta_6$ (2 sol.)
2 & 3	s.n.i.	θ_4	$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_5,\theta_7$ (2 sol.)
2 & 4	s.n.i.		$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_7$ (6 sol.)
3 & 4	s.n.i.	θ_2,θ_4	$\theta_1,\theta_3,\theta_5$ (2 sol.)
1, 2 & 3	s.l.i.	θ_4	$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_5,\theta_6,\theta_7$ (2 sol.)
1, 2 & 4	s.l.i.	$\theta_2,\theta_4,\theta_7$	$\theta_1,\theta_3,\theta_5,\theta_6$ (2 sol.)
1, 3 & 4	s.n.i.	θ_2,θ_4	$\theta_1,\theta_3,\theta_5,\theta_6$ (2 sol.)
2, 3 & 4	s.n.i.	$\theta_2,\theta_4,\theta_7$	$\theta_1,\theta_3,\theta_5$ (2 sol.)
1, 2, 3 & 4	s.l.i.	$\theta_2,\theta_4,\theta_7$	$\theta_1,\theta_3,\theta_5,\theta_6$ (2 sol.)

4 sorties, 3 compartiments, mais jamais s.g.i. !

Quand s.l.i., on peut générer tous les θ donnant le même comportement

Observer y_1,y_2 et y_4 ou y_1,y_2,y_3 et y_4 donne qualitativement la même chose

Un modèle + complexe peut être + identifiable !



2 paramètres en plus, pas plus de sorties, mais s.g.i. si on observe y_1,y_2,y_3 et y_4 !