Problème DEA 93-94, identification

On considère un problème d'estimation de paramètres pour un modèle de type Michaelis-Menten, défini par :

$$y_m(\boldsymbol{p},x) = \frac{p_1 x}{p_2 + x},$$

où $\boldsymbol{p} = (p_1,p_2)^T$ désigne le vecteur de paramètres à estimer. On doit effectuer pour cela deux mesures, sous les conditions expérimentales respectives x_a et x_b. Les erreurs de mesures sont supposées indépendantes et de distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2. Il s'agit alors de choisir x_a et x_b de manière à assurer une estimation de $\boldsymbol{p}$ la plus précise possible au sens du critère de D-optimalité (maximisation du déterminant de la matrice d'information de Fisher F). On suppose que toutes les variables p_1,p_2,x_a,x_b sont positives.

Calculer la matrice F en fonction de p_1,p_2,x_a,x_b et σ^2. Montrer que la valeur de σ^2 est sans conséquence sur le choix optimal de x_a et x_b. On posera donc dans la suite $\sigma^2 = 1$. Calculer le déterminant de F (il s'écrit simplement en fonction de $x_a^2,x_b^2,(x_a-x_b)^2,p_1^2,(p_2+x_a)^4$ et $(p_2+x_b)^4$). Noter qu'il est préférable de travailler sur $\sqrt{\det(F)}$.

On suppose dans un premier temps que x_a est fixé. Déterminer (en fonction de x_a et p_2) la valeur de x_b qui annule la dérivée de $\sqrt{\det(F)}$ par rapport à x_b. Montrer qu'elle correspond bien à un maximum du critère. Pourquoi cette valeur de x_b ne dépend-elle pas de p_1 ? Reporter la valeur de x_b obtenue dans $\sqrt{\det(F)}$ pour obtenir une fonction de x_a (et p_1,p_2) seulement. Comment choisir alors x_a pour maximiser le critère ?