Problème DEA 94-95, identification. Cours de Luc Pronzato

On considère un problème d'estimation de paramètres pour un modèle décrit par :

$$y_m(\boldsymbol{p},x) = \frac{p_1 + x}{xp_2} \,,$$

où $\boldsymbol{p} = (p_1,p_2)^T$ désigne le vecteur de paramètres à estimer. On doit effectuer pour cela deux mesures, sous les conditions expérimentales respectives x_a et x_b. Les erreurs de mesures sont supposées indépendantes et de distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2. Il s'agit de choisir x_a et x_b de manière à assurer une estimation de $\boldsymbol{p}$ la plus précise possible au sens du critère de D-optimalité (maximisation du déterminant de la matrice d'information de Fisher F). On suppose que toutes les variables p_1,p_2,x_a,x_b sont strictement positives.

Calculer la matrice F en fonction de p_1,p_2,x_a,x_b et σ^2. Montrer que la valeur de σ^2 est sans conséquence sur le choix optimal de x_a et x_b. On posera donc dans la suite $\sigma^2 = 1$.

Calculer le déterminant de F (il s'écrit simplement en fonction de x_a^2,x_b^2, $(x_a - x_b)^2,p_2^6$).

On suppose que la variable expérimentale x satisfait les contraintes $1 \leq x \leq 2$. Calculer les deux valeurs de x, soit x_a et x_b, avec $x_a < x_b$, qui maximisent le déterminant de F (on pourra utiliser le changement de variable $z = 1/x$).

On considère à présent une approche du type planification approximative, pour laquelle on suppose que 50% des observations seront effectuées pour $x = x_a$ et 50% pour $x = x_b$, x_a et x_b prenant les valeurs trouvées précédemment. On souhaite établir la D-optimalité de ce protocole expérimental ξ. Écrire la matrice d'information de Fisher moyenne par échantillon $F_m(\xi)$, puis calculer la fonction $f(x) = d(x,\xi) = \boldsymbol{s}(x)^T F_m^{-1}(\xi)\boldsymbol{s}(x)$ avec $\boldsymbol{s}(x)$ le vecteur de sensiblité de la réponse du modèle par rapport aux paramètres. Quelle est la valeur maximale de $f(x)$ sur l'intervalle $[1,2]$? En quels points est-elle atteinte ? Conclure quant à la D-optimalité du protocole ξ.