Problème DEA 94-95, identification. Cours de Luc Pronzato

On considère un problème d'estimation de paramètres pour un modèle décrit par :

$$y_m(\mathbf{p},\mathbf{x}) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \,,$$

où $\mathbf{p} = (p_1,p_2)^T$ désigne le vecteur de paramètres à estimer et $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ est le vecteur des variables expérimentales, avec un domaine admissible

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in I\!\!R^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 1\} \,.$$

Dans un premier temps on pense effectuer les mesures aux deux points $\mathbf{x}^1 = (1,0)^T$ et $\mathbf{x}^2 = (0,1)^T$, avec un nombre égal de répétitions de mesures en chacun des points.

Calculer la matrice d'information de Fisher moyenne par échantillon $\mathbf{I}_F(\xi_1)$ pour ce protocole expérimental ξ_1, sous l'hypothèse d'erreurs de mesures indépendantes et de distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2. Montrer que la valeur de σ^2 est sans conséquence sur le choix optimal du protocole expérimental. On posera donc dans la suite $\sigma^2 = 1$.

Calculer la fonction $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x},\xi_1) = \mathbf{s}(\mathbf{x})^T \mathbf{I}_F^{-1}(\xi_1)\mathbf{s}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ le vecteur de sensiblité de la réponse du modèle par rapport aux paramètres. En quel point $\mathbf{x}^*$ la valeur maximale de $f(\mathbf{x})$ est-elle atteinte sur $\mathcal{X}$? Conclure quant à la D-optimalité du protocole ξ_1.

On considère à présent un protocole expérimental ξ_2 à trois points de support $\mathbf{x}^1 = (1,0)^T$, $\mathbf{x}^2 = (0,1)^T$ et $\mathbf{x}^3 = (1,1)^T$, toujours avec un nombre égal de répétitions de mesures en chacun des points. Calculer alors $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x},\xi_2)$. En quels point le maximum est il atteint sur $\mathcal{X}$? Conclure quant à la D-optimalité du protocole ξ_2.