Problème DEA ARAVIS 96, identification. Cours de Luc Pronzato

On considère un système linéaire, stationnaire pour ne pas trop alourdir les notations, du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_{k+1} & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k\,, \\ \boldsymbol{y}_k & = & \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k\,, \end{array} \right.$$

avec $\boldsymbol{x}$ l'état du système (dim $\boldsymbol{x} = n$), $\boldsymbol{u}$ les entrées (dim $\boldsymbol{u} = p$) et $\boldsymbol{y}$ les sorties observées (dim $\boldsymbol{y} = m$). On suppose que $E\{\boldsymbol{v}_k\} = \mathbf{0}$ (vecteur nul), $E\{\boldsymbol{w}_k\} = \mathbf{0}$, $E\{\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{V}$, $E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{W}$ et $E\{\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{w}_l^T\} = \boldsymbol{O}$ (matrice nulle).

Les équations habituelles du filtre de Kalman exigent $\boldsymbol{W}$ inversible. On suppose ici que

$$\boldsymbol{w}_k = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w}_k^2 \end{array} \right)\,,$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{W} = \left(\begin{array}{cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{W}^2 \end{array} \right)\,.$$

On décompose alors $\boldsymbol{y}_k$ en $\boldsymbol{y}_k^1$ (sorties non bruitées) et $\boldsymbol{y}_k^2$ (sorties bruitées) :

$$\boldsymbol{y}_k = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{y}_k^1 \\ \boldsymbol{y}_k^2 \end{array} \right)\,,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}_k^1 & = & \boldsymbol{C}^1\boldsymbol{x}_k\,, \\ \boldsymbol{y}_k^2 & = & \boldsymbol{C}^2\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k^2\,, \end{array} \right.$$

où l'on supposera que $\boldsymbol{C}^1$ est de rang plein. On pose

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_k^1 \\ \boldsymbol{x}_k^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{C}^1 \\ \boldsymbol{D} \end{array} \right) \boldsymbol{x}_k\,,$$

avec $\boldsymbol{D}$ également de rang plein, et donc

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{C}^1 \\ \boldsymbol{D} \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_k^1 \\ \boldsymbol{x}_k^2 \end{array} \right) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_k^1 + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_k^2\,.$$

1/

Montrer que l'on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}^1_{k+1} & = & \boldsymbol{A}^{11}\boldsymbol{x}^1_k + \boldsymbol{A}^{12}\boldsymbol{x}^2_k + \boldsymbol{B}^1\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{E}^1\boldsymbol{v}_k\,, \\ \boldsymbol{x}^2_{k+1} & = & \boldsymbol{A}^{21}\boldsymbol{x}^1_k + \boldsymbol{A}^{22}\boldsymbol{x}^2_k + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{v}_k\,, \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}^1_k & = & \boldsymbol{x}^1_k\,, \\ \boldsymbol{y}^2_k & = & \boldsymbol{C}^{21}\boldsymbol{x}^1_k + \boldsymbol{C}^{22}\boldsymbol{x}^2_k + \boldsymbol{w}^2_k\,. \end{array}\right.$$

On explicitera les matrices intervenant dans ces équations en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}^1$,$\boldsymbol{C}^2$,$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$.

2/

On obtient ainsi un système linéaire d'état $\boldsymbol{x}^2_k$, avec une équation d'évolution

$$\boldsymbol{x}^2_{k+1} = \boldsymbol{A}^{22}\boldsymbol{x}^2_k + \boldsymbol{A}^{21}\boldsymbol{y}^1_k + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{v}_k\,,$$

et deux équations d'observation

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{z}^1_k & = & \boldsymbol{y}^2_k - \boldsymbol{C}^{21}\boldsymbol{y}^1_k\,, \\ \boldsymbol{z}^2_k & = & \boldsymbol{y}^1_{k+1} - \boldsymbol{A}^{11}\boldsymbol{y}^1_k - \boldsymbol{B}^1\boldsymbol{u}_k\,. \end{array}\right.$$

Montrer que ces équations d'observation peuvent s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{x}^2_k + \boldsymbol{w}'_k\,,$$

avec

$$\boldsymbol{z}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}^1_k \\ \boldsymbol{z}^2_k \end{pmatrix}.$$

On explicitera $\boldsymbol{C}'$ et $\boldsymbol{w}'_k$ en fonction de $\boldsymbol{C}^{22}$,$\boldsymbol{A}^{12}$,$\boldsymbol{E}^1$,$\boldsymbol{w}^2_k$ et $\boldsymbol{v}_k$.

A quel instant semble-t-il que l'on pourra effectivement calculer $\hat{\boldsymbol{x}}^2_{k|k} = E\{\boldsymbol{x}^2_k|\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_k\}$? On verra en 6/ comment faire face à ce problème.

3/

On pose $\boldsymbol{v}'_k = \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{v}_k$. Calculer les corrélations $E\{\boldsymbol{w}'_k\boldsymbol{w}'^T_l\}$, $E\{\boldsymbol{v}'_k\boldsymbol{v}'^T_l\}$ et $E\{\boldsymbol{w}'_k\boldsymbol{v}'^T_l\}$ en fonction de $\boldsymbol{E}^1$,$\boldsymbol{E}^2$,$\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}^2$.

4/

Considérons à présent un système du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_{k+1} & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k \,, \\ \boldsymbol{y}_k & = & \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k \,, \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $E\{\boldsymbol{v}_k\} = \boldsymbol{0}$, $E\{\boldsymbol{w}_k\} = \boldsymbol{0}$, $E\{\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{V}$, $E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{W}$ et des bruits $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ corrélés : $E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{v}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{S}^T$.

On pose $\bar{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_k$. Calculer $E\{\boldsymbol{w}_k\bar{\boldsymbol{v}}_l^T\}$ et $E\{\bar{\boldsymbol{v}}_k\bar{\boldsymbol{v}}_l^T\}$. Réécrire l'équation d'évolution du système (1) sous la forme

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y}_k + \bar{\boldsymbol{v}}_k \,. \tag{2}$$

On explicitera $\boldsymbol{A}'$ et $\boldsymbol{F}$ en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{C}$.

Écrire les équations du filtre de Kalman pour le système donné par (2) et l'équation d'observation de (1). On explicitera les matrices intervenant dans les équations de récurrence en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{S}$. Montrer que le filtre prédicteur prend la forme suivante

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) \,, \tag{3}$$

où l'on explicitera $\boldsymbol{R}_k$ en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{C}$ et du gain $\boldsymbol{K}_k$ du filtre.

5/

Conclure quant à l'utilisation du filtre de Kalman pour le système obtenu en 2/ : montrer qu'il suffit de remplacer dans les équations établies en 4/

— $\hat{\boldsymbol{x}}$ par $\hat{\boldsymbol{x}}^2$,

— $\boldsymbol{y}_k$ par $\boldsymbol{z}_k$,

— $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k$ par des valeurs adéquates faisant intervenir $\boldsymbol{A}^{21}$,$\boldsymbol{A}^{22}$,$\boldsymbol{C}'$,$\boldsymbol{B}^2$,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{W}^2$,$\boldsymbol{E}^1$,$\boldsymbol{E}^2$ et $\boldsymbol{y}_k^1$.

Écrire l'équation donnant $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}^2$ en fonction de $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^2$ et $\boldsymbol{z}_k$ sous une forme similaire à (3). On utilise le filtre stationnaire (et donc $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{R}$ constant dans la formule précédente). On partitionne $\boldsymbol{R}$ en $(\boldsymbol{R}^1\ \boldsymbol{R}^2)$, le nombre de colonnes de $\boldsymbol{R}^1$ étant égal à la dimension de $\boldsymbol{z}_k^1$, et on définit

$$\boldsymbol{s}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^2 - \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{y}_k^1 \,.$$

Montrer que $\boldsymbol{s}_k$ suit une équation de récurrence du type

$$\boldsymbol{s}_{k+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}_k^1 + \boldsymbol{R}^1\boldsymbol{z}_k^1\,,$$

où l'on explicitera $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{T}$ en fonction de $\boldsymbol{A}^{11}$,$\boldsymbol{A}^{12}$,$\boldsymbol{A}^{21}$,$\boldsymbol{A}^{22}$,$\boldsymbol{B}^1$,$\boldsymbol{B}^2$,$\boldsymbol{C}^{22}$,$\boldsymbol{R}^1$ et $\boldsymbol{R}^2$. Expliquer en quoi ceci permet de contourner le problème soulevé en 2/.