Problème DEA ARAVIS 97, identification. Cours de Luc Pronzato

1/ Considérons un système linéaire du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_{k+1} & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k \,, \\ \boldsymbol{y}_k & = & \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k \,, \end{array} \right. \tag{1}$$

avec des perturbations $\boldsymbol{v}_k$ et $\boldsymbol{w}_k$ qui satisfont

$E\{\boldsymbol{v}_k\} = \boldsymbol{0}$, $E\{\boldsymbol{w}_k\} = \boldsymbol{0}$, $E\{\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{V}$, $E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{W}$, $E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{v}_l^T\} = \delta_{kl}\boldsymbol{S}^T$.

On pose $\bar{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_k$.

a/ Calculer $E\{\boldsymbol{w}_k\bar{\boldsymbol{v}}_l^T\}$ et $E\{\bar{\boldsymbol{v}}_k\bar{\boldsymbol{v}}_l^T\}$.

b/ Réécrire l'équation d'évolution du système (1) sous la forme

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y}_k + \bar{\boldsymbol{v}}_k \,, \tag{2}$$

et expliciter $\boldsymbol{A}'$ et $\boldsymbol{F}$ en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{C}$.

c/ Écrire les équations du filtre de Kalman pour le système donné par (2) et l'équation d'observation de (1). Expliciter les matrices intervenant dans les équations de récurrence en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{S}$.

d/ Montrer que le filtre prédicteur prend la forme suivante

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) \,,$$

et expliciter $\boldsymbol{R}_k$ en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{C}$ et du gain $\boldsymbol{K}_k$ du filtre.

2/ On souhaite implémenter le filtre de Kalman stationnaire.

a/ Écrire l'équation de Ricatti pour la matrice de covariance $\boldsymbol{P} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{P}_{k+1|k}$ et donner l'expression du gain $\boldsymbol{K}$ du filtre stationnnaire en fonction de $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{W}$.

b/ Montrer que les équations du filtre prédicteur stationnaire sont de la forme

$$\begin{array}{rcl} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} & = & \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{y}}_k \,, \\ \boldsymbol{y}_k & = & \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \tilde{\boldsymbol{y}}_k \,. \end{array}$$

Donner l'expression de $\boldsymbol{R}$ en fonction de $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{W}$. Calculer l'espérance conditionnelle $E\{\tilde{\boldsymbol{y}}_k|\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_{k-1}\}$.

c/ Donner la forme entrée sortie $(\boldsymbol{u}_k, \tilde{\boldsymbol{y}}_k) \mapsto \boldsymbol{y}_k$ du filtre en utilisant l'opérateur retard q^{-1}.

d/ De quel type de filtre s'agit-il ? Comment pourrait-on estimer les paramètres inconnus intervenant dans les matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$?