

Rapport de stage de L3

La catégorie des automates cellulaires

Julien Provillard

Septembre 2007

Table des matières

1	Introduction	3
2	Rappels et résultats préliminaires	4
2.1	Sur les automates cellulaires	4
2.2	Sur les catégories	6
3	La catégorie des automates cellulaires	7
4	Groupés communs de 2 groupés d'un même automate cellulaire	7
4.1	Etude générale	7
4.2	Notion de groupé minimal	9
5	Un système de réécriture	10
5.1	Définition	11
5.2	Terminaison	13
5.3	Confluence	15
6	Conclusion	19

1 Introduction

Les automates cellulaires sont composés de cellules pouvant prendre plusieurs états et disposées sur une grille. L'état d'une cellule varie dans le temps en fonction de son propre état et de l'état des cellules d'un certain voisinage.

Les premiers automates cellulaires sont issus des travaux de *Stanislaw Ulam* et de *John von Neumann* sur l'autoréplication dans les années 1940. Ce dernier est parvenu à créer un automate cellulaire et un motif initial qui après un certain nombre d'étapes se reproduisait.

Ils furent par la suite formalisés et étudiés pour eux-même. On découvrit en effet qu'ils étaient très utiles pour modéliser certains phénomènes. Le *Jeu de la Vie* de *John Conway* est un des exemples marquants (et amusant) de modélisation. La communauté informatique de l'époque étudia beaucoup cet automate et en découvrit la richesse et la complexité.

De nos jours, outre cette capacité de modélisation, on étudie les automates cellulaires en tant que système dynamique discret et système complexe. En effet même parmi les automates les plus simples des comportements d'une grande complexité apparaissent. Par exemple certains sont capables de simuler une machine de Turing universelle. A partir de cette constatation, on a tenté de classer les automates cellulaires en fonction de leur complexité.

La première et la plus connue est la classification de *Stephen Wolfram*. Cependant celle-ci a été jugée trop informelle et d'autres classifications formelles reposant sur des bases mathématiques ont été proposées. Une classification basée sur des notions topologiques a été proposée par *Gianpiero Cattaneo* et étendue par *Enrico Formenti*.

Cependant celle qui sert de base à ce travail est celle introduite par *Ivan Rappaport* et généralisée par *Nicolas Ollinger*. Cette classification est basée sur la notion de groupage et de simulation d'automate cellulaire par un autre. C'est un ordre partiel sur les classes d'isomorphisme d'automates cellulaires. Le but du stage a été d'enrichir cette classification en substituant la structure d'ordre partiel par une structure de catégorie.

Les catégories sont utilisées et étudiées en mathématiques et en informatique. En mathématiques, elles forment une théorie à part entière. Son étude est motivée par les résultats qu'elle apporte à la théorie des ensembles, à l'algèbre générale et en topologie. En informatique, elles servent de modèle de lambda-calcul.

L'idée d'enrichir la classification se justifie par l'espoir de pouvoir réutiliser des résultats de la théorie des catégories dans l'étude des automates cellulaires.

L'article commence par un rappel sur les automates cellulaires. On y redonne la notion de groupage introduite par *N. Ollinger* ainsi que quelques propriétés utiles sur ce groupage. On donne également la définition des catégories.

Dans une deuxième partie, on introduit la catégorie **Cel** des automates cellulaires, structure sur laquelle se base tout le reste de l'article. On y justifiera que le choix de la

catégorie est bon et donc que l'on peut espérer découvrir de bonnes propriétés.

Par la suite, on définit la notion de groupé commun de deux groupés d'un même automate cellulaire. Cette notion est intéressante par elle-même car elle donne des informations quant à la structure de la catégorie. Elle est cependant surtout utile pour la partie suivante où elle joue le rôle de lemme important.

La dernière partie est consacrée à l'étude d'un système de réécriture sur les flèches de la catégorie \mathbf{Cel} qui valide la définition de la catégorie.

2 Rappels et résultats préliminaires

2.1 Sur les automates cellulaires

Nous donnons ici les définitions locales et globales des automates cellulaires ainsi que les notions de configuration et d'évolution.

Définition 1 (Automate cellulaire, définition locale) *Un automate cellulaire (AC) est un triplet (Q, r, δ) où*

- Q est un ensemble fini appelé l'ensemble des états
- r un entier naturel appelé le rayon de l'automate cellulaire
- $\delta : Q^{(2r+1)} \rightarrow Q$ la fonction de transition locale de l'automate

Par la suite, on notera pour un AC \mathcal{A} , $Q_{\mathcal{A}}$ son ensemble d'états, $r_{\mathcal{A}}$ son rayon et $\delta_{\mathcal{A}}$ sa fonction de transition locale.

Définition 2 (Configuration et évolution) *Une configuration d'un AC \mathcal{A} est un élément C de $Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$. On définit la fonction de transition globale de l'automate, $G_{\mathcal{A}} : Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$, par $G_{\mathcal{A}}(C)_p = \delta_{\mathcal{A}}(C_{p-r_{\mathcal{A}}}, \dots, C_{p+r_{\mathcal{A}}})$. L'évolution de l'automate à partir d'une configuration C est la suite $(G_{\mathcal{A}}^t(C))_{t \in \mathbb{N}}$. Un diagramme espace temps de l'automate est la représentation graphique d'une évolution.*

Définition 3 (Automate cellulaire, définition globale) *Un automate cellulaire est une fonction continue de $Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}}$ qui commute avec les translations où Q est un ensemble fini.*

Théorème 4 (G. Hedlund) *Les définitions locales et globales des automates cellulaires sont équivalentes.*

Le théorème de Hedlund fait le lien entre les deux définitions. La vision habituelle est celle issue de la définition locale, cependant la définition globale est beaucoup plus utile. Elle rend de nombreux résultats plus faciles à démontrer et est plus facile à manipuler.

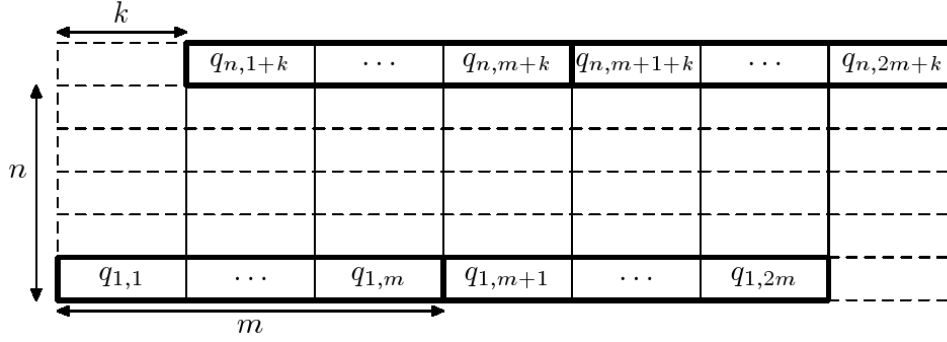
N. Ollinger a introduit dans [4] des transformations naturelles sur les automates cellulaires. Nous notons $g_{m,n,k}$ ($m > 0$, $n > 0$, $k \in \mathbb{Z}$) la fonction qui a un AC \mathcal{A} associe l'AC $\mathcal{A}^{m,n,k}$ tel que

$$G_{\mathcal{A}^{m,n,k}} = o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o_m$$

où

- o_m est la fonction $(Q_{\mathcal{A}}^m)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (Q_{\mathcal{A}})^{\mathbb{Z}}$ telle que $o_m(C)_{qm+r} = (C_q)_r$.
- σ_k est la translation de vecteur k , c'est à dire la fonction $(Q_{\mathcal{A}})^{\mathbb{Z}} \rightarrow (Q_{\mathcal{A}})^{\mathbb{Z}}$ telle que $\sigma_k(C)_p = C_{p-k}$.

Le groupage se représente visuellement sur les diagrammes espace-temps. Une ligne est la représentation d'une configuration et, en montant, on observe l'évolution de la configuration initiale par l'automate.



Graphiquement, le groupage est un zoom arrière sur les diagrammes espace-temps. Il permet notamment de faire apparaître des comportements de l'AC de base que l'on ne verrait pas autrement. Du point de vu des AC, le groupage transforme un AC en un autre qui est "contenu" dans le premier.

Définition 5 On dit qu'un AC A est inclus dans un AC B et on note $A \subseteq B$ s'il existe une injection $\phi : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow Q_{\mathcal{B}}$ telle que $\bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}} = G_{\mathcal{B}} \circ \bar{\phi}$ où $\bar{\phi} : (Q_{\mathcal{A}})^{\mathbb{Z}} \rightarrow (Q_{\mathcal{B}})^{\mathbb{Z}}$ est la fonction telle que $\bar{\phi}(C)_p = \phi(C_p)$.

Cette définition formalise la notion de "contenance" évoquée plus haut.

Définition 6 On dit qu'un AC B simule un AC A si et seulement si un groupé de A est inclus dans un groupé de B .

L'ordre introduit par N. Ollinger est basé sur la simulation. $A \leq B$ si et seulement si A est simulé par B .

Lemme 7 Pour tout \mathcal{A} , m , n , k , n' ,

$$(\mathcal{A}^{m,n,k})^{n'} = \mathcal{A}^{m,nn',n'k}$$

Preuve 8 Nous allons montrer cette propriété par récurrence.

Elle est vrai pour $n' = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un certain n' .

$$\begin{aligned}
(G_{\mathcal{A}^{m,n,k}})^{n'+1} &= G_{\mathcal{A}^{m,n,k}} \circ (G_{\mathcal{A}^{m,n,k}})^{n'} \\
&= G_{\mathcal{A}^{m,n,k}} \circ G_{\mathcal{A}^{m,nn',n'k}} \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}^n} \circ o_m \circ o_m^{-1} \circ \sigma_{n'k} \circ G_{\mathcal{A}^{nn'}} \circ o_m \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}^n} \circ \sigma_{n'k} \circ G_{\mathcal{A}^{nn'}} \circ o_m \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ \sigma_{n'k} \circ G_{\mathcal{A}^n} \circ G_{\mathcal{A}^{nn'}} \circ o_m \\
&\quad \text{car les translations commutent avec les AC} \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_{(n'+1)k} \circ G_{\mathcal{A}^{n(n'+1)}} \circ o_m \\
&= G_{\mathcal{A}^{m,n(n'+1),(n'+1)k}}
\end{aligned}$$

Lemme 9 Pour tout m, k ,

$$\sigma_k \circ o_m = o_m \circ \sigma_{mk}$$

Preuve 10 Translater après avoir groupé revient à grouper après avoir translaté du même vecteur multiplié par le nombre de cellules groupées.

Proposition 11 Pour tout $\mathcal{A}, m_1, n_1, k_1, m_2, n_2, k_2$,

$$(\mathcal{A}^{m_1, n_1, k_1})^{m_2, n_2, k_2} = \mathcal{A}^{m_1 m_2, n_1 n_2, n_2 k_1 + k_2 m_1}$$

Preuve 12

$$\begin{aligned}
G_{(\mathcal{A}^{m_1, n_1, k_1})^{m_2, n_2, k_2}} &= o_{m_2}^{-1} \circ \sigma_{k_2} \circ (G_{\mathcal{A}^{m_1, n_1, k_1}})^{n_2} \circ o_{m_2} \\
&= o_{m_2}^{-1} \circ \sigma_{k_2} \circ G_{\mathcal{A}^{m_1, n_1 n_2, n_2 k_1}} \circ o_{m_2} && \text{d'après le lemme 7} \\
&= o_{m_2}^{-1} \circ \sigma_{k_2} \circ o_{m_1}^{-1} \circ \sigma_{n_2 k_1} \circ (G_{\mathcal{A}})^{n_1 n_2} \circ o_{m_1} \circ o_{m_2} \\
&= o_{m_2}^{-1} \circ o_{m_1}^{-1} \circ \sigma_{m_1 k_2} \circ \sigma_{n_2 k_1} \circ (G_{\mathcal{A}})^{n_1 n_2} \circ o_{m_1} \circ o_{m_2} && \text{d'après le lemme 9} \\
&= o_{m_1 m_2}^{-1} \circ \sigma_{n_2 k_1 + m_1 k_2} \circ (G_{\mathcal{A}})^{n_1 n_2} \circ o_{m_1 m_2} \\
&= G_{\mathcal{A}^{m_1 m_2, n_1 n_2, n_2 k_1 + k_2 m_1}}
\end{aligned}$$

Ce résultat indique que la composition de deux groupages est un groupage et en donne les caractéristiques.

2.2 Sur les catégories

Etant donné un graphe \mathcal{G} et un entier k , on note \mathcal{G}_k l'ensemble des chemins de longueur k dans \mathcal{G} .

Définition 13 Une catégorie est un multigraphe \mathcal{G} avec deux fonctions $c : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1$ et $u : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1$ qui vérifient les propriétés énumérées ci-dessous. Les éléments de \mathcal{G}_0 sont appelés les objets et ceux de \mathcal{G}_1 les flèches. La fonction c est appelée la composition et on note $g \circ f = c(g, f)$. Pour un objet A , on note $id_A = u(A)$; id_A est appelée l'identité de l'objet A .

- L'origine de $g \circ f$ est l'origine de f . La cible de $g \circ f$ est la cible de g .
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dès que l'un des côtés est défini.
- L'origine et la cible de id_A sont A .
- Si f est une flèche de A à B alors $f \circ id_A = id_B \circ f = f$

C'est cette structure qui est utilisée en informatique pour la sémantique des langages fonctionnels ou comme modèle de lambda-calcul.

3 La catégorie des automates cellulaires

Définissons un multigraphe \mathcal{G} par :

- Les sommets de \mathcal{G} sont les AC
- Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des AC, alors les flèches de \mathcal{A} à \mathcal{B} sont de trois types :
 - Les flèches indexées par les injections $\phi : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow Q_{\mathcal{B}}$ telles que, par ϕ , \mathcal{A} s'injecte dans \mathcal{B} .
 - Les flèches indexées par $g_{m,n,k}$ telles que $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{m,n,k}$
 - Les flèches indexées par $g_{m,n,k}^{-1}$ telles que $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{m,n,k}$

Nous définissons alors la catégorie **Cel** des automates cellulaires par :

- Les objets de **Cel** sont les AC
- Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des AC, alors les flèches de \mathcal{A} à \mathcal{B} dans **Cel** sont les chemins de \mathcal{A} à \mathcal{B} dans \mathcal{G}
- La composition des flèches est la composition usuelle des chemins
- Pour un AC \mathcal{A} , $id_{\mathcal{A}}$ est le chemin vide de \mathcal{A} à \mathcal{A}

On retrouve la classification de *N. Ollinger* dans cette catégorie. Si on avait $A \leq B$ dans la classification alors il y a un chemin de A à B dans la catégorie et réciproquement. Par contre grâce à la catégorie, on peut savoir de quelle manière un AC est inférieur à un autre.

4 Groupés communs de 2 groupés d'un même automate cellulaire

4.1 Etude générale

Le problème que nous nous posons est le suivant :

Soit un AC \mathcal{A} et deux groupés $\mathcal{A}^{m,n,k}$ et $\mathcal{A}^{m',n',k'}$ de cet AC. Quels sont les AC qui sont des groupés de $\mathcal{A}^{m,n,k}$ et de $\mathcal{A}^{m',n',k'}$?

Reformulé autrement, quels sont les $m_1, n_1, k_1, m_2, n_2, k_2$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{g_{m,n,k}} & \mathcal{A}^{m,n,k} \\
 g_{m',n',k'} \downarrow & & \downarrow g_{m_1,n_1,k_1} \\
 \mathcal{A}^{m',n',k'} & \xrightarrow{g_{m_2,n_2,k_2}} & \mathcal{B}
 \end{array}$$

Ce qui signifie qu'étant donné un AC \mathcal{A} , et deux groupés \mathcal{B} et \mathcal{C} de cet AC. Quels sont les groupés communs à \mathcal{B} et \mathcal{C} ?

Ceci nous amène, via la proposition 11 à résoudre le système :

$$\begin{cases} (1) & mm_1 = m'm_2 \\ (2) & nn_1 = n'n_2 \\ (3) & n_1k + k_1m = n_2k' + k_2m' \end{cases}$$

L'équation (1) est indépendante des deux autres et ces solutions sont :

$$\left\{ m_1 = \alpha \frac{m \vee m'}{m}, m_2 = \alpha \frac{m \vee m'}{m'}, \alpha > 0 \right\}$$

Soit n_1, k_1, n_2, k_2 , une solution de (2) et (3), alors il existe $\beta > 0$ tel que $n_1 = \beta \frac{n \vee n'}{n}$ et $n_2 = \beta \frac{n \vee n'}{n'}$. (3) s'écrit alors :

$$(4) \quad \beta \frac{n \vee n'}{n} k + k_1 m = \beta \frac{n \vee n'}{n'} k' + k_2 m'$$

ou encore

$$(5) \quad \beta \left(\frac{n \vee n'}{n} k - \frac{n \vee n'}{n'} k' \right) = k_2 m' - k_1 m$$

or il existe γ tel que $k_2 m' - k_1 m = \gamma(m \wedge m')$

Si $\gamma = 0$, alors $k_1 = k_2 = k = k' = 0$ et l'équation (3) était en fait triviale.

Désormais $\gamma \neq 0$ et on obtient :

$$(6) \quad \beta \left(\frac{n \vee n'}{n} k - \frac{n \vee n'}{n'} k' \right) = \gamma(m \wedge m')$$

puis

$$(7) \quad \beta \frac{n'k - nk'}{n \wedge n'} = \gamma(m \wedge m')$$

Cette équation impose que $\frac{n'k - nk'}{n \wedge n'}$ divise $\gamma(m \wedge m')$.

C'est à dire $\gamma = \delta \frac{\frac{n'k - nk'}{n \wedge n'}}{\frac{n'k - nk'}{n \wedge n'} \wedge (m \wedge m')} = \delta \frac{n'k - nk'}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))}$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} n_1 = \delta \frac{\frac{n'k - nk'}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))} (m \wedge m')}{\frac{n \wedge n'}{n'k - nk'}} \frac{n \vee n'}{n} = \delta \frac{n'(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))} \\ n_2 = \delta \frac{\frac{n'(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))}}{\frac{n \vee n'}{n}} \\ k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des solutions de l'équation } k_2 m' - k_1 m = \delta \frac{(n'k - nk')(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))} \\ \delta > 0 \end{cases}$$

On remarque que cette forme convient également si $\gamma = 0$.

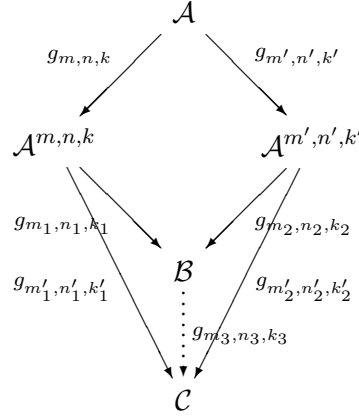
Réciproquement on vérifie que tout système de cette forme est solution de (2) et (3).

Finalement, les solutions de (1), (2) et (3) sont les uples

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \alpha \frac{m'}{m \wedge m'} \\ m_2 = \alpha \frac{m}{m \wedge m'} \\ n_1 = \beta \frac{n'(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))} \\ n_2 = \beta \frac{n(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))} \\ k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des solutions de l'équation } k_2 m' - k_1 m = \beta \frac{(n'k - nk')(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))} \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right.$$

4.2 Notion de groupé minimal

Nous avons également cherché à savoir si toute solution de ce système donnait un automate qui était le groupé d'une solution minimale ($\alpha = \beta = 1$). Ce qui revient à la validité du diagramme suivant :



où les flèches qui mènent à \mathcal{B} ont été choisies avec $\alpha = \beta = 1$ et la flèche en pointillé est une flèche existentielle.

En terme de catégorie, nous cherchons à trouver si on peut définir un pullback. Ce qui nous permettrait d'avoir une notion de minimal ou de forme canonique parmi tous les groupés communs.

Or on sait exprimer m'_1, n'_1, k'_1 en fonction de m_1, n_1, k_1 . Il existe α, β, γ tels que :

$$\begin{aligned} m'_1 &= \alpha m_1 \\ n'_1 &= \beta n_1 \\ k'_1 &= \gamma \frac{m'}{m \wedge m'} + \beta k_1 \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que (k_1, k_2) est une solution de

$$k_2 m' - k_1 m = \frac{(n'k - nk')(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))}$$

donc $(\beta k_1, \beta k_2)$ est une solution de

$$k_2 m' - k_1 m = \beta \frac{(n'k - nk')(m \wedge m')}{(n'k - nk') \wedge ((n \wedge n')(m \wedge m'))}$$

donc l'ensemble des solutions de cette dernière équation est $\left\{ \left(\delta \frac{m'}{m \wedge m'} + \beta k_1, \delta \frac{m}{m \wedge m'} + \beta k_2 \right), \delta \in \mathbb{Z} \right\}$.

On cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} mm_1 m_3 = \alpha mm_1 \\ nn_1 n_3 = \beta nn_1 \\ \beta(n_1 k + k_1)m + k_3 mm_1 = \beta n_1 k + \left(\gamma \frac{m'}{m \wedge m'} + \beta k_1 \right) m \end{cases}$$

En se rappelant que $m_1 = \frac{m'}{m \wedge m'}$, on trouve la solution :

$$\begin{cases} m_3 = \alpha \\ n_3 = \beta \\ k_3 = \gamma \end{cases}$$

Ceci nous définit une infinité de pullback : tous les groupés communs minimaux (solution minimale du système). Dans la suite, nous privilégierons le groupé minimal pour lequel $0 \leq k_2 < m_2$. En effet tous les groupés minimaux sont égaux à translation près, quand on en a choisit un, on peut retrouver tous les autres.

5 Un système de réécriture

La catégorie que nous avons définie est correcte, cependant elle reste insatisfaisante quant à la composition et même au niveau des flèches en elles-même. Par exemple, nous avons vu que la composition de deux groupage est un groupage. Ceci n'apparaît pas dans la catégorie, il n'y a pas de "simplification". Pour reprendre l'exemple, nous aurions une flèche de **Cel** qui serait un chemin composé de deux flèches de \mathcal{G} alors que nous aimerions que cette flèche de la catégorie soit représentée par une unique flèche de \mathcal{G} indexée par la composition des groupages.

Nous allons définir un système de réécriture qui va donner une forme normale aux flèches de **Cel** et, par la même occasion, à la composition. Il faudra ensuite voir la même catégorie mais dans laquelle toutes les flèches sont données par leur forme normale via le système de réécriture.

5.1 Définition

Nous allons introduire des conventions de représentations des flèches de \mathcal{G} .

- Une flèche indexée par $g_{m,n,k}$ sera représentée par

$$\nearrow g_{m,n,k}$$

- Une flèche indexée par une injection ϕ sera représentée par

$$\xrightarrow{\phi}$$

- Une flèche indexée par $g_{m,n,k}^{-1}$ sera représentée par

$$\searrow g_{m,n,k}^{-1}$$

L'origine et la cible d'une flèche restent implicites (nous verrons en effet qu'elles n'ont pas d'influence dans l'étude).

Lemme 14 *Pour tout $\mathcal{A}, \mathcal{B}, m, n, k$,*

$$\text{Si } A \xrightarrow{\phi} B \text{ alors } A^{m,n,k} \xrightarrow{\phi_m} B^{m,n,k}$$

où ϕ_m est une injection que l'on définit dans la preuve

Cette proposition peut aussi se formuler sous la forme :

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}^{m,n,k} \subseteq \mathcal{B}^{m,n,k}$$

Preuve 15 *Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} tels que*

$$A \xrightarrow{\phi} B$$

$$\bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}} = G_{\mathcal{B}} \circ \bar{\phi}.$$

Par récurrence, on montre que $\bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}}^n = G_{\mathcal{B}}^n \circ \bar{\phi}$

C'est vrai pour $n = 1$,

Supposons que ce soit vrai pour un certain n alors

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{B}}^{n+1} \circ \bar{\phi} &= G_{\mathcal{B}} \circ G_{\mathcal{B}}^n \circ \bar{\phi} \\ &= G_{\mathcal{B}} \circ \bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}}^n \\ &= \bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}} \circ G_{\mathcal{A}}^n \\ &= \bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}}^{n+1} \end{aligned}$$

$\bar{\phi}$ commute clairement avec les translations.

Enfin, on définit l'injection $\phi_m : Q_{\mathcal{A}}^m \rightarrow Q_{\mathcal{B}}^m$ par $\phi_m(a_1, \dots, a_m) = (\phi(a_1), \dots, \phi(a_m))$.

On a alors $\bar{\phi} \circ o_m = o_m \circ \bar{\phi}_m$ et $\bar{\phi}_m \circ o_m^{-1} = o_m^{-1} \circ \bar{\phi}$.

D'où,

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_m \circ G_{\mathcal{A}^{m,n,k}} &= \bar{\phi}_m \circ o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o_m \\
&= o_m^{-1} \circ \bar{\phi} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o_m \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ \bar{\phi} \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o_m \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ \bar{\phi} \circ o_m \\
&= o_m^{-1} \circ \sigma_k \circ G_{\mathcal{A}}^n \circ o_m \circ \bar{\phi}_m \\
&= G_{\mathcal{B}^{m,n,k}} \circ \bar{\phi}_m
\end{aligned}$$

et donc

$$A^{m,n,k} \xrightarrow{\phi_m} B^{m,n,k}$$

Nous définissons un système de réécriture sur les flèches de \mathbf{Cel} par les règles suivantes :

– *Elimination 1*

$$\begin{array}{ccc}
\nearrow & & \\
g_{1,1,0} & \rightsquigarrow & \emptyset
\end{array}$$

– *Elimination 2*

$$\begin{array}{ccc}
\longrightarrow & & \\
id & \rightsquigarrow & \emptyset
\end{array}$$

– *Elimination 3*

$$\begin{array}{ccc}
\searrow & & \\
g_{1,1,0}^{-1} & \rightsquigarrow & \emptyset
\end{array}$$

Les trois éliminations correspondent à la suppression des éléments neutres.

– *Transitivité 1*

$$\begin{array}{ccc}
& \nearrow & \\
& g_{m',n',k'} & \rightsquigarrow \\
& \nearrow & \\
& g_{m,n,k} & \\
& \nearrow & \\
& g_{mm',nn',n'k'+k'm} &
\end{array}$$

– *Transitivité 2*

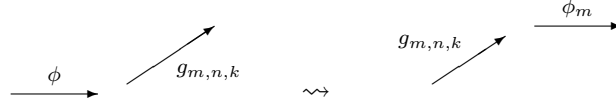
$$\begin{array}{ccc}
\longrightarrow & \longrightarrow & \\
\phi & \psi & \rightsquigarrow \\
\longrightarrow & \psi \circ \phi &
\end{array}$$

– *Transitivité 3*

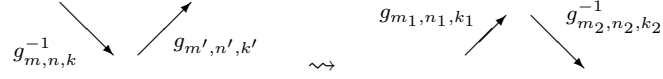
$$\begin{array}{ccc}
& \searrow & \\
& g_{m,n,k}^{-1} & \rightsquigarrow \\
& \searrow & \\
& g_{m',n',k'}^{-1} & \\
& \searrow & \\
& g_{mm',nn',n'k'+km'}^{-1} &
\end{array}$$

Les trois transitivités correspondent aux compositions des groupages et des injections.

– *Redressement 1*



– *Redressement 2*



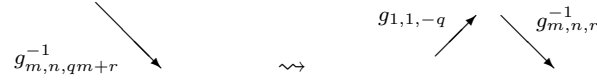
où $(m_1, n_1, k_1, m_2, n_2, k_2)$ est l'unique solution minimale pour le problème du groupé commun avec $0 \leq k_2 < m_2$.

– *Redressement 3*



Les *Redressements 1 et 3* correspondent au lemme 14 tandis que le *Redressement 2* se rapporte au travail de la section 4.2. Les trois *Redressements* se justifient par le fait qu'à la fin du système de réécriture nous voudrions avoir des chemins correspondants à la définition de N . *Ollinger*, c'est à dire une simulation : un groupé qui s'injecte dans un autre. Cependant des flèches pour lesquelles nous aimerions avoir une même forme normale ne l'ont pas. Ce sont par exemple celles qui apparaissent dans la règle suivante. Celle-ci a d'ailleurs été introduite pour remédier à ce problème.

– *Normalisation*



où $q \neq 0$ et $0 \leq r < m$. La forme normale aura donc $q = 0$.

5.2 Terminaison

Un système de réécriture termine (est fortement normalisant) lorsque quelle que soit la manière d'appliquer les règles à un terme quelconque, à un moment donné on ne peut plus appliquer aucune règle. Autrement dit, il n'existe pas de chaîne de réduction infinie.

Définition 16 On définit une fonction $\rho : \mathcal{G}_1 \rightarrow \{0, 1, 2\}$ par :

$$\rho(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est indexée par } g_{m,n,k} \\ 1 & \text{si } f \text{ est indexée par } \phi \\ 2 & \text{si } f \text{ est indexée par } g_{m,n,k}^{-1} \end{cases}$$

On définit ensuite la fonction $\bar{\rho}$ qui associe un entier à un chemin dans \mathcal{G} par :

$$\begin{cases} \bar{\rho}(\emptyset) = 0 \\ \text{Pour tout chemin } u = x_0 \dots x_n \text{ non vide de } \mathcal{G}, \\ \bar{\rho}(u) = 1 + \sum_{i=0}^n \rho(x_i) 3^{n-i} \end{cases}$$

Définition 17 On définit une fonction $\gamma : \mathcal{G}_1 \rightarrow \{0, 2, 4\}$ par :

$$\gamma(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est indéxée par } g_{m,n,k} \\ 0 & \text{si } f \text{ est indéxée par } \phi \\ 2 & \text{si } f \text{ est indéxée par } g_{m,n,k}^{-1} \text{ et } 0 \leq k < m \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit ensuite la fonction $\bar{\gamma}$ qui associe un entier à un chemin dans \mathcal{G} par :

$$\begin{cases} \bar{\gamma}(\emptyset) = 0 \\ \text{Pour tout chemin } u = x_0 \dots x_n \text{ non vide de } \mathcal{G}, \\ \bar{\gamma}(u) = \sum_{i=0}^n \gamma(x_i) \end{cases}$$

Définition 18 Pour un chemin u de \mathcal{G} , on note $l(u)$ sa longueur.

Proposition 19 Ce système de réécriture est fortement normalisant.

Preuve 20 La preuve est fondée sur le fait que si u se réduit en u' alors

$$(l(u') + \bar{\gamma}(u'), \bar{\rho}(u')) <_{lex} (l(u) + \bar{\gamma}(u), \bar{\rho}(u)).$$

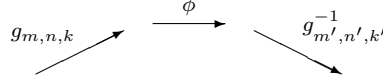
- *Elimination 1*
 $l(u') = l(u) - 1$ et $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$
- *Elimination 2*
 $l(u') = l(u) - 1$ et $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$
- *Elimination 3*
 $l(u') = l(u) - 1$ et $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$
- *Transitivité 1*
 $l(u') = l(u) - 1$ et $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$
- *Transitivité 2*
 $l(u') = l(u) - 1$ et $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$
- *Transitivité 3*
 $l(u') = l(u) - 1$ et $\bar{\gamma}(u') \leq \bar{\gamma}(u)$
- *Redressement 1*
 $l(u') = l(u)$, $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$ et $\bar{\rho}(u') < \bar{\rho}(u)$
- *Redressement 2*
 $l(u') = l(u)$, $\bar{\gamma}(u') \leq \bar{\gamma}(u)$ et $\bar{\rho}(u') < \bar{\rho}(u)$
- *Redressement 3*
 $l(u') = l(u)$, $\bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u)$ et $\bar{\rho}(u') < \bar{\rho}(u)$

– *Normalisation*

$$l(u') = l(u) + 1 \text{ et } \bar{\gamma}(u') = \bar{\gamma}(u) - 2$$

Il est facile de montrer que le temps de terminaison est un $O(l^3)$ où l est la longueur du chemin initial. On conjecture que ce temps de terminaison est un $O(l^2)$.

Le chemin obtenu lorsque le système termine est de la forme :



où $0 \leq k' < m'$.

5.3 Confluence

La confluence d'un système de réécriture indique que s'il y a deux moyens de réduire un terme alors les deux réduits obtenus se réduisent eux-même en un seul et même terme. Concrètement cela signifie que nous pouvons appliquer les règles dans n'importe quel ordre sans que cela change le résultat.

Une paire critique est un terme minimal pour lequel deux règles s'appliquent et entrent en conflit (l'application de l'une empêche ou modifie l'application de l'autre). Une paire critique est dite joignable lorsque les réduits obtenus en appliquant chacune des deux règles se réduisent en un même terme. Un théorème affirme que si toutes les paires critiques sont joignables alors le système est confluent. C'est pour cela que nous allons étudier les paires critiques.

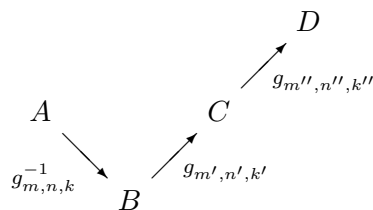
Voici le tableau qui récapitule les 22 paires critiques qui apparaissent :

	Elimination 1	Elimination 2	Elimination 3	Transitivité 1	Transitivité 2	Transitivité 3	Redressement 1	Redressement 2	Redressement 3	Normalisation
Elimination 1		X	X	X	X	X	X	X	X	X
Elimination 2			X	X	X	X	X	X	X	X
Elimination 3				X	X	X	X	X	X	X
Transitivité 1	c			c	X	X	X	X	X	X
Transitivité 2		c			c	X	X	X	X	X
Transitivité 3			c			c	X	X	X	X
Redressement 1	c	c		c	c			X	X	X
Redressement 2	c		c	c		c			X	X
Redressement 3		c	c		c	c	c			X
Normalisation						c		c	c	

c = paire critique

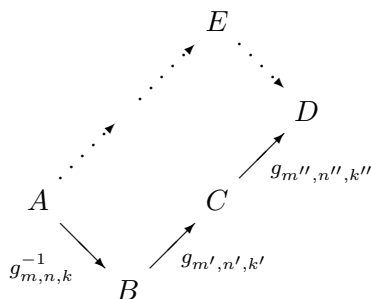
– Les 3 paires critiques faisant intervenir les *Eliminations* et les *Transitivités* sont clairement joignables. Les éléments éliminés sont les éléments neutres pour la transitivité.

- Les 6 paires critiques faisant intervenir les *Eliminations* et les *Redressements* sont joignables car on peut éliminer avant ou après le redressement.
- Les 3 paires critiques des *Transitivités* avec elles-mêmes sont joignables par l'associativité de la composition des fonctions.
- *Transitivité 1 + Redressement 1* et *Transitivité 3 + Redressement 3*
Joignable car $(\phi_m)_{m'} = \phi_{mm'}$.
- *Transitivité 1 + Redressement 2*
Pour cette paire critique nous allons nous intéresser aux cibles et origines des flèches.
La paire critique est de la forme :



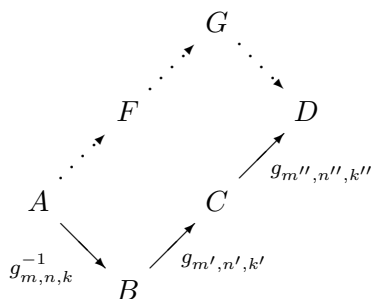
1. Première série de réductions

Translation 1 puis *Redressement 2*



2. Deuxième série de réductions

Redressement 2, Redressement 2 puis *Translation 1*



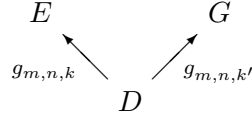
E est le groupé commun minimal de A et D , et G est un groupé commun de A et D , donc G est un groupé de E .

F est le groupé commun minimal de A et C , et E est un groupé commun de A et C , donc E est un groupé de F .

G est le groupé commun minimal de F et D , et E est un groupé commun de F et D , donc E est un groupé de G .

E et G sont des groupés l'un de l'autre donc ils diffèrent au plus d'une translation.

On obtient alors le diagramme suivant :



où $0 \leq k < m$, $0 \leq k' < m$, et k et k' sont issus d'une solution minimale du problème du groupé commun.

Donc $k = k'$ et $G = E$. La paire est joignable.

- *Transitivité 2 + Redressement 1* et *Transitivité 2 + Redressement 3*

Joignable car $\phi_m \circ \psi_m = (\phi \circ \psi)_m$.

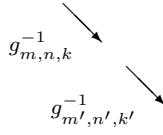
- *Transitivité 3 + Redressement 2*

Symétrique de *Transitivité 1 + Redressement 2* à *Normalisation* près

- *Transitivité 3 + Normalisation*

Il existe en fait deux paires critiques pour ce cas pour un total de trois formes normales. Nous allons montrer que ces formes normales sont égales.

Nous partons de



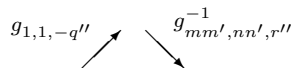
Les divisions euclidiennes respectives de k et k' par m et m' s'écrivent

$$\begin{aligned} k &= qm + r \\ k' &= q'm' + r' \end{aligned}$$

1. Première série de réductions



On note alors q'' et r'' le quotient et le reste de la division euclidienne de $nk' + km'$ par mm' . On obtient finalement :



- La paire est joignable
- *Redressement 2 + Normalisation*
La paire est joignable car si on effectue les réductions *Normalisation*, *Redressement 2* et *Transitivité 1*, on obtient l'unique solution du système du groupé commun défini par le *Redressement 2*.
- *Redressement 3 + Normalisation*
Joignable car les injections commutent avec les translations.

Théorème 21 *Le système de réécriture est confluent.*

Désormais quand on parle de flèches de **Cel**, on parle de leur forme normale par le système de réécriture. Ce qui simplifie la manipulation des flèches et celle de la composition.

6 Conclusion

Ce travail a donc essentiellement consisté à donner une extension de la classification de *Nicolas Ollinger* à travers la structure de catégorie. Il a fallu pour cela définir une catégorie qui paraît simpliste mais qui se révèle plus fine vue au travers du filtre d'un système de réécriture.

Cette catégorie n'est évidemment pas une fin en soi mais plutôt un moyen pour trouver plus facilement des résultats sur la structure de la classification. En effet, on sait que l'ordre introduit par *Nicolas Ollinger* est très complexe. Aujourd'hui, on connaît le bas de l'ordre, le haut de l'ordre (qui est composé d'un automate cellulaire universel, *ie* dont les groupés simulent tout autre automate) et quelques propriétés sur le milieu de l'ordre. Par exemple, on sait construire des chaînes croissantes et décroissantes infinies. La structure de catégorie pourrait nous aider à étudier le milieu de l'ordre.

La suite immédiate de ce travail consisterait à étudier plus précisément la catégorie. Par exemple, regarder si la catégorie est cartésienement close. Dans tous les cas, la catégorie qui a été ici définie doit avant tout être vue comme une base de travail ou un outil pratique.

Références

- [1] BARR MICHAEL ET WELLS CHARLES. *Category theory for computing science*. New York 1990.
- [2] RAPAPORT IVAN. *Inducing an order on cellular automata by a grouping operation*. PhD thesis, Ecole Normal Supérieur de Lyon, juin 1997.
- [3] MARTIN BRUNO. *Automates cellulaires, information et chaos*. PhD thesis, Ecole Normal Supérieur de Lyon, janvier 2001.
- [4] OLLINGER NICOLAS. *Automates cellulaires : structure*. PhD thesis, Ecole Normal Supérieur de Lyon, décembre 2002.