

Automates cellulaires et perturbations structurelles

Julien Provillard

1 Introduction

Les automates cellulaires sont des systèmes dynamiques qui à partir de règles locales simples engendrent des comportements globaux parfois très complexes. Cette propriété se révèle très intéressante dans le cadre de la modélisation ou de la simulation de nombreux phénomènes. Cependant les automates cellulaires ont une régularité structurelle très forte, il est donc intéressant de déterminer ce qui arrive lorsque cette régularité est perturbée. Si l'automate sert de modèle, l'étude de cette perturbation correspond à l'étude de la robustesse du modèle face à des imperfections de modélisation et contribue donc à sa validation. Dans le cadre de simulation, cette étude indique si les propriétés de l'automate changent radicalement en cas de panne ou de défaut dans l'outil qui l'implémente.

Pour mener à bien cette étude nous allons définir un nouvel objet dérivé des automates cellulaires que l'on appellera automate cellulaire perturbé. Nous définirons trois classes qui structurent ces objets puis nous ferons une étude comparée de leurs propriétés avec celles des automates cellulaires.

2 Définitions

2.1 Rappels sur les espaces symboliques et les automates cellulaires

Dans toute la suite, A désigne un alphabet fini contenant au moins deux lettres. On appelle mot sur A toute suite finie, infinie ou biinfinie de lettres. On note A^* l'ensemble des mots finis sur A , $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis sur A et $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des mots biinfinis sur A .

Si x est un mot fini, on note $|x|$ sa longueur. On note x_i la $i^{\text{ème}}$ lettre du mot x et $x_{[i,j]}$ le mot $x_i x_{i+1} \dots x_{j-1}$.

On munit $A^{\mathbb{Z}}$ de la distance de Cantor ainsi définie :

$$d(x, y) = 2^{-\min(\{|i| : i \in \mathbb{Z} \text{ et } x_i \neq y_i\})}$$

L'espace $(A^{\mathbb{Z}}, d)$ est un espace de Cantor, c'est à dire un espace parfait, compact et totalement discontinu.

Un **cylindre** est n'importe quel ensemble

$$[u]_i = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_{[i, i+|u|]} = u\}$$

L'ensemble des cylindres forme une base d'ouvert de $(A^{\mathbb{Z}}, d)$.

Définition 2.1. Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un **automate cellulaire (AC)** si et seulement s'il existe un naturel r et une fonction $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, F(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

On appelle r le **rayon** et f la **règle locale** de l'automate cellulaire.

On étend la règle locale f en une fonction de A^* à valeur dans A^* que l'on note encore f et que l'on définit par :

$$\forall u \in A^*, f(u) = \begin{cases} \lambda & \text{si } |u| < 2r + 1 \\ v \in A^{|u|-2r} & \text{tel que } \forall i \in \{0, \dots, |u| - 2r - 1\}, v_i = f(u_i, \dots, u_{i+2r}) \end{cases} \text{ sinon}$$

Il existe une caractérisation topologique des automates cellulaires à l'aide du shift. Le shift est la fonction $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_i = x_{i+1}$$

Théorème 2.2 (Hedlund [Hed69]). *Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si elle est continue et commute avec le shift (ie le diagramme suivant commute).*

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{F} & A^{\mathbb{Z}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ A^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{F} & A^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

2.2 Automates cellulaires perturbés

Définition 2.3. *Une fonction $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un **automate cellulaire perturbé (ACP)** si et seulement si pour tout entier i , il existe un naturel r_i et une fonction $h_i : A^{2r_i+1} \rightarrow A$ tels que*

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r_i}, \dots, x_{i+r_i})$$

On appelle r_i le **rayon** de h_i .

Tout comme les automates cellulaires, il existe une caractérisation topologique des automates cellulaires perturbés.

Théorème 2.4. *Une fonction $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire perturbé (ACP) si et seulement si elle est continue.*

Démonstration. Pour rappel, comme on travaille sur un espace compact, la continuité est équivalente à l'uniforme continuité.

- Supposons que $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ soit un ACP.
Soit $\epsilon = 2^{-k}$, on pose $r = \max\{r_i : -k \leq i \leq k\}$ et $\delta = 2^{-(k+r)}$.
Alors pour tout $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que $d(x, y) < \delta$, $d(H(x), H(y)) < \epsilon$.
Donc H est continue.
- Supposons que $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ soit continue.
Alors pour $\epsilon = 2^{-i}$, il existe $\delta = 2^{-k}$ tel que $\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(H(x), H(y)) < \epsilon$.
Donc pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$, $H(x)_i$ et $H(x)_{-i}$ ne dépendent que de x_{-k}, \dots, x_k .
Ce qui nous permet de définir f_i et f_{-i} ad hoc.
Donc H est un ACP.

□

2.3 Classification

Le théorème 2.4 montre que la notion d'automate cellulaire perturbé que nous avons développée a une structure très éloignée des automates cellulaires classiques. En fait, nous donnons une définition très large des ACP mais ne travaillons que sur des sous-classes pertinentes. Ainsi nous allons définir les ACP de type I, dans lesquels les perturbations sont en nombre fini, et les ACP de type II, pour lesquels on peut définir un rayon global. Pour cette dernière classe nous introduirons la notion de compatibilité avec un automate cellulaire qui permet de préserver une partie de la structure originelle de l'AC.

Définition 2.5.

- Un ACP H est de type I s'il existe deux naturel k et r et une fonction $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, |i| > k \Rightarrow H(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

En ce cas on dit que H est de règle principale f .

- Un ACP H est de type II s'il existe un naturel r tel que pour tout entier i , il existe une fonction $h_i : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

On appelle r le rayon de H .

- On dit qu'un ACP H de type II est n -compatible avec une règle $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ si pour tout naturel k , il existe deux entiers $k_1 > k$ et $k_2 < -k$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in [k_1, k_1 + n) \cup [k_2, k_2 + n), H(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

La n -compatibilité avec une règle f pour un ACP H signifie que l'on peut trouver des intervalles de longueur n aussi loin que l'on veut où s'applique la règle f . Il est clair que tout ACP de type I et de règle principale f est n -compatible avec f pour tout n .

On note \mathcal{AC} l'ensemble des automates cellulaires, \mathcal{ACP} l'ensemble des automates cellulaires perturbés, \mathcal{P}_1 l'ensemble des ACP de type I et \mathcal{P}_2 l'ensemble des ACP de type II.

Proposition 2.6. $\mathcal{AC} \subsetneq \mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2 \subsetneq \mathcal{ACP}$

Démonstration. $\mathcal{AC} \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{ACP}$ est clair. Pour les inclusions strictes, on pourra se reporter à la section 4.1 pour des exemples. \square

3 Etude des automates cellulaires perturbés

3.1 Propriétés générales

Proposition 3.1. *Tout ACP de type II est conjugué avec un ACP de type II et de rayon 1.*

Démonstration. Soit $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ un ACP de type II et de rayon $r > 1$. Pour tout entier i , il existe une fonction $h_i : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

On pose $B = A^r$ et on définit $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ par $\forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x)_i = x_{[ir, (i+1)r)}$.

On définit un ACP de type II $(B^{\mathbb{Z}}, H')$ par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H'(x)_i = h'_i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \text{ où}$$

$$\forall u, v, w \in B, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{0, \dots, r-1\}, (h'_i(u, v, w))_j = h_{ir+j}(u_{[j,r)} v w_{[0,j]})$$

Alors $\phi : (A^{\mathbb{Z}}, H) \rightarrow (B^{\mathbb{Z}}, H')$ est une conjugaison. \square

Théorème 3.2. *Tout automate cellulaire perturbé de type II est sous-système d'un automate cellulaire classique.*

Ce théorème signifie que pour tout automate cellulaire perturbé $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ de type II, il existe un automate cellulaire classique $(B^{\mathbb{Z}}, F)$ et une fonction continue injective $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ tels que $\phi \circ H = F \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{H} & A^{\mathbb{Z}} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ B^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{F} & B^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Démonstration. Soit $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ un ACP de type II. En ce cas, il existe un naturel r tel que pour tout entier i , il existe une fonction $h_i : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

Or il existe un nombre finie de telles fonctions, il y en a $n = |A|^{|A|^{2r+1}}$. On se donne une énumération $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ de ces fonctions. On pose $B = A \times \{1, \dots, n\}$, $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x)_i = (x_i, k) \text{ tel que } H(x)_i = f_k(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

et on définit l'AC $F : B^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ par sa règle locale $f : B^{2r+1} \rightarrow B$ telle que

$$f((x_{-r}, k_{-r}), \dots, (x_0, k_0), \dots, (x_r, k_r)) = (f_{k_0}(x_{-r}, \dots, x_r), k_0)$$

ϕ est une fonction continue injective et $\phi \circ H = F \circ \phi$. □

Définition 3.3. *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ un ACP de type II tel que*

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

– On dit qu'une des règles h_i est **permutive à gauche** si

$$\forall u \in A^{2r}, \forall b \in A, \exists! a \in A, h_i(au) = b$$

– On dit qu'une des règles h_i est **permutive à droite** si

$$\forall u \in A^{2r}, \forall b \in A, \exists! a \in A, h_i(ua) = b$$

- On dit que H est **permutif à gauche** si pour tout i , h_i est permutive à gauche.
- On dit que H est **permutif à droite** si pour tout i , h_i est permutive à droite.
- On dit que H est **permutif** s'il est permutif à gauche ou à droite.
- Une **colonne sous-shift** de $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ est n'importe quel sous-shift Σ_I où $I = [a, b]$ est un intervalle d'entier et

$$\Sigma_I = \{x \in (A^{b-a+1})^{\mathbb{N}} : \exists y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{N}, x_i = H^i(y)_{[a,b]}\}$$

On définit la fonction $\mathcal{I} : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma_I$ par $\mathcal{I}(x) = (H^i(x)_I)_{i \in \mathbb{N}}$. \mathcal{I} est continue et surjective par définition de Σ_I . De plus le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{H} & A^{\mathbb{Z}} \\ \mathcal{I} \downarrow & & \downarrow \mathcal{I} \\ \Sigma_I & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_I \end{array}$$

Donc (Σ_I, σ) est un facteur de $(A^{\mathbb{Z}}, H)$.

Théorème 3.4. *Si $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ est un ACP de type II, de rayon r à la fois permutif à gauche et à droite alors il est conjugué au full-shift $((A^{2r})^{\mathbb{N}}, \sigma)$.*

Démonstration. En ce cas la fonction $\mathcal{I} : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A^{2r})^{\mathbb{N}}$ est bijective. \square

Les conditions de ce théorème sont très fortes et il existe des ACP non permutifs qui sont conjugués au full-shift. On donne le cas très simple de l'ACP de type II tel que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{si } i \leq 0 \\ x_{i+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

car en ce cas $\Sigma_{\{0,1\}} = (A^2)^{\mathbb{N}}$ et \mathcal{I} est injective.

3.2 Définitions utiles sur les systèmes dynamiques

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions sur les systèmes dynamiques et nous reverrons au passage certains résultats de topologie. Pour ces derniers, nous nous référons à [Kel75].

Définition 3.5. *Un **système dynamique** est un couple (X, F) où X est un espace métrique et $F : X \rightarrow X$ est une fonction continue.*

En particulier les AC et les ACP sont des systèmes dynamiques sur un espace compact.

Etant donné un espace métrique X ,

– On note $B_\delta(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon δ .

$$y \in B_\delta(x) \Leftrightarrow d(x, y) < \delta$$

– Un ensemble $Y \subseteq X$ est dit **résiduel** s'il existe une suite d'ouverts denses $(U_i)_{i \geq 0}$ telle que

$$\bigcap_{i \geq 0} U_i \subseteq Y$$

– *Théorème de Baire.* Dans un espace compact, tout ensemble résiduel est non-vide et dense.

Définition 3.6. *Soit (X, F) un système dynamique,*

– *L'ensemble des **points d'équicontinuité** $\xi \subseteq X$ de F est défini par*

$$x \in \xi \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall n \geq 0, d(F^n(x), F^n(y)) < \epsilon$$

– *On dit que F est **équicontinue** si $\xi = X$.*

– *On dit que F est **presque-équicontinue** si ξ est un ensemble résiduel.*

Définition 3.7. Soit (X, F) un système dynamique, F est **sensible** s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists n \geq 0, d(F^n(x), F^n(y)) \geq \epsilon$$

Définition 3.8. Soit (X, F) un système dynamique, F est **expansif** s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \neq y \in X, \exists n \geq 0, d(F^n(x), F^n(y)) \geq \epsilon$$

Définition 3.9. Soit (X, F) un système dynamique, F est **transitif** si pour tout U et V ouverts non vides, il existe $n \geq 0$ tel que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

3.3 Equicontinuité

L'équicontinuité est une notion de stabilité pour les automates cellulaires. Nous allons étudier si cette stabilité est robuste par rapport aux perturbations.

Définition 3.10. Soit $s > 0$, un mot $u \in A^+$ avec $|u| \geq s$ est dit **s -bloquant** pour un AC $(A^\mathbb{Z}, F)$ s'il existe un offset $p \in [0, |u| - s]$ tel que

$$\forall x, y \in [u]_0, \forall n \geq 0, F^n(x)_{[p, p+s]} = F^n(y)_{[p, p+s]}$$

Proposition 3.11 (Kurka [Kur04]). Soit $(A^\mathbb{Z}, F)$ un automate cellulaire de rayon $r > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(A^\mathbb{Z}, F)$ est non-sensible.
2. $(A^\mathbb{Z}, F)$ admet un mot r -bloquant.
3. $(A^\mathbb{Z}, F)$ est presque-équicontinu.

Proposition 3.12 (Kurka [Kur97]). Soit $(A^\mathbb{Z}, F)$ un automate cellulaire de rayon $r > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(A^\mathbb{Z}, F)$ est équicontinu.
2. il existe $k > 0$ tel que $\forall u \in A^k$, u est r -bloquant.
3. il existe $p > 0$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $F^{q+p} = F^q$.

La notion de mot bloquant ne passe pas directement aux ACP, en effet certains mots sont bloquants grâce à l'uniformité de l'application de la règle locale des automates cellulaires (nous verrons un exemple plus tard). De plus, dans les preuves des propositions 3.11 et 3.12, la commutation avec le shift est utilisée. Nous allons voir comment contourner le problème en introduisant la notion de mot fortement bloquant et en utilisant la compatibilité définie précédemment.

Définition 3.13. Soit $s > 0$, un mot $u \in A^+$ avec $|u| \geq s$ est dit **fortement s -bloquant** pour un AC $(A^\mathbb{Z}, F)$ de règle locale f et de rayon r s'il existe un offset $p \in [0, |u| - s]$ tel que pour tout ACP $(A^\mathbb{Z}, H)$ vérifiant

$$\forall i \in \{0, \dots, |u| - 1\}, \forall x \in A^\mathbb{Z}, H(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

on a

$$\forall x, y \in [u]_0, \forall n \geq 0, H^n(x)_{[p, p+s]} = H^n(y)_{[p, p+s]}$$

Cette définition signifie qu'un mot est fortement bloquant s'il est bloquant et ce quelque soit la manière dont on peut perturber les règles qui ne l'influencent pas directement (ie qui influencent uniquement son voisinage).

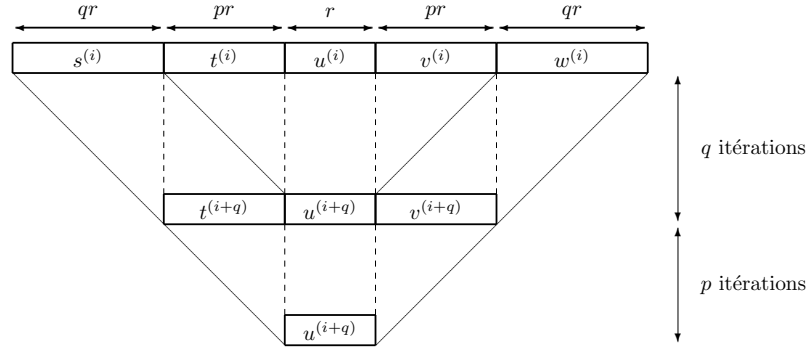


FIG. 1 – Mots fortement bloquants

Proposition 3.14. Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire de rayon $r > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ est équicontinu.
2. il existe $k > 0$ tel que $\forall u \in A^k$, u est fortement r -bloquant.

Démonstration. (2) \Rightarrow (1) est une conséquence de la proposition 3.12.

Supposons que $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ soit un AC équicontinu de règle locale f et de rayon r . D'après la proposition 3.12, il existe $p > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $F^{q+p} = F^q$. En conséquence, on a

$$\forall u \in A^*, |u| > 2(q+p)r \Rightarrow f^{p+q}(u) = f^q(u)_{[pr, |u| - (2q+p)r]}$$

Soit H un ACP tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, (2p+2q+1)r-1\}, \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$, pour tout $i \geq 0$, on note :

$$\begin{aligned} s^{(i)} &= H^i(x)_{[0, qr]} \\ t^{(i)} &= H^i(x)_{[qr, (q+p)r]} \\ u^{(i)} &= H^i(x)_{[(q+p)r, (q+p+1)r]} \\ v^{(i)} &= H^i(x)_{[(q+p+1)r, (q+2p+1)r]} \\ w^{(i)} &= H^i(x)_{[(q+2p+1)r, (2q+2p+1)r]} \end{aligned}$$

Alors pour tout $i \in 0, \dots, q+p$, $u^{(i)}$ est entièrement déterminé par $s^{(0)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(0)}w^{(0)} = x_{[0, (2q+2p+1)r]}$. De plus pour tout naturel i (Fig. 1),

$$\begin{aligned} u^{(i+q+p)} &= f^{q+p}(s^{(i)}t^{(i)}u^{(i)}v^{(i)}w^{(i)}) \\ &= f^q(s^{(i)}t^{(i)}u^{(i)}v^{(i)}w^{(i)})_{[pr, (p+1)r]} \\ &= (t^{(i+q)}u^{(i+q)}v^{(i+q)})_{[pr, (p+1)r]} \\ &= u^{(i+q)} \end{aligned}$$

Finalement pour tout naturel i , $u^{(i)}$ est entièrement déterminé par $x_{[0, (2q+2p+1)r]}$ qui est donc fortement r -bloquant. Comme ce résultat est valable pour toute configuration x , la preuve est achevée. \square

Théorème 3.15. Si F est un AC de règle locale f qui admet un mot u fortement r -bloquant et H est un ACP de type II de rayon r , $|u|$ -compatible avec f alors H est presque équicontinu.

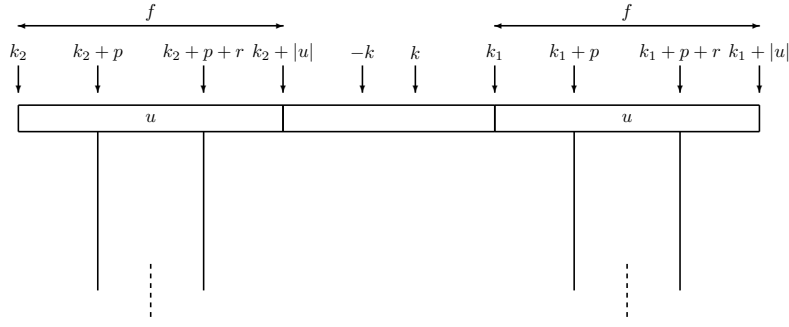


FIG. 2 – Un point d'équicontinuité

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $T_{u,k} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ par $x \in T_{u,k}$ si et seulement s'il existe $k_1 > k$ et $k_2 < -k$ tels que $x_{[k_1, k_1+|u|]} = u$, $x_{[k_2, k_2+|u|]} = u$ et

$$\forall y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in [k_1, k_1+n) \cup [k_2, k_2+n), H(y)_i = f(y_{i-r}, \dots, y_{i+r})$$

$T_{u,k}$ est ouvert car c'est une union de cylindres, de plus $T_{u,k}$ est dense par hypothèse de $|u|$ -compatibilité. $T_u = \bigcap_{k \geq n} T_{u,k}$ est donc un ensemble résiduel.

Soit $x \in T_u$ et $\epsilon = 2^{-k}$, alors il existe $k_1 > k$ et $k_2 < -k - |u|$ tels que (fig. 2) $x_{[k_1, k_1+|u|]} = u$, $x_{[k_2, k_2+|u|]} = u$ et

$$\forall y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in [k_1, k_1+n) \cup [k_2, k_2+n), H(y)_i = f(y_{i-r}, \dots, y_{i+r})$$

On pose $\delta = \min\{2^{-(k_1+|u|)}, 2^{-k_2}\}$, soit y tel que $d(x, y) < \delta$, alors $y_{[k_2, k_2+|u|]} = x_{[k_2, k_2+|u|]}$. On note p l'offset de u , alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $H^k(x)_{[k_1+p, k_1+p+r]}$ et $H^k(x)_{[k_2+p, k_2+p+r]}$.

Pour $k_2 + p + r \leq i < k_1 + p$ on a

$$H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r}) = h_i(y_{i-r}, \dots, y_{i+r}) = H(y)_i$$

Par induction, pour $k > 0$,

$$H^k(x)_{[k_2+p, k_1+p+r]} = H^k(y)_{[k_2+p, k_1+p+r]}$$

et donc $d(H^k(x), H^k(y)) < \epsilon$. □

Théorème 3.16. *Si F est un ACP équicontinuu de règle locale f , alors il existe k tel que tout mot de longueur k est fortement r -bloquant. De plus, si H est un ACP de type II de rayon r , k -compatible avec f alors H est équicontinuu.*

Démonstration. La preuve est similaire à la précédente. □

3.4 Surjectivité

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ un ACP de type II, alors il existe un naturel r tel que pour tout entier i , il existe une fonction $h_i : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

On étend ces fonctions sur A^* , $\forall i \in \mathbb{Z}$, $h_i^* : A^* \rightarrow A^*$ est défini par

$$\forall u \in A^*, \forall j \in \{0, \dots, |u| - 2r - 1\}, (h_i^*(u))_j = h_{i+j}(u_{[j, j+2r]})$$

Théorème 3.17. *Un ACP $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ de type II et de rayon r est surjectif si et seulement si*

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall u \in A^*, |h_i^{*-1}(u)| = |A|^{2r}$$

Démonstration. Supposons que la condition soit vérifiée et donnons-nous $y \in A^{\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : h_{-n}^*(x_{[-n-r, n+r]}) = y_{[-n, n]}\}$$

Par hypothèse, les X_n sont non-vides. De plus ils sont fermés et $X_{n+1} \subseteq X_n$. Par compacité, il existe $x \in \bigcap_{n \geq 0} X_n$. On a alors $H(x) = y$ et H est surjective. Réciproquement, supposons que H soit surjective. On définit alors $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$$p_i = \min\{|h_i^{*-1}(u)| : u \in A^+\}$$

Lemme 3.18. *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, pour tout $u \in A^+$, si $|h_i^{*-1}(u)| = p_i$ alors $\forall a \in A, |h_i^{*-1}(ua)| = p_i$*

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $u \in A^+$, par hypothèse, $\forall a \in A, |h_i^{*-1}(ua)| \geq p_i$, supposons qu'il existe $a \in A, |h_i^{*-1}(ua)| > p_i$. En ce cas, nous avons

$$p_i \cdot |A| = \left| \bigcup_{b \in A} \{vb : v \in h_i^{*-1}(u)\} \right| = \left| \bigcup_{a \in A} h_i^{*-1}(ua) \right| > p_i \cdot |A|$$

et nous avons alors une contradiction. □

Lemme 3.19. $\forall i \in \mathbb{Z}, p_i = p_{i+1}$

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{Z}$,

- Soit $u \in A^*$ tel que $|h_{i+1}^{*-1}(u)| = p_{i+1}$. Alors $\forall a \in A, |h_i^{*-1}(au)| \leq p_{i+1}$ car u a p_{i+1} préimages. Donc $p_i \leq p_{i+1}$.
- Supposons par l'absurde que $p_i < p_{i+1}$, soit $a \in A$ et $u \in A^*$ tels que $|h_i^{*-1}(au)| = p_i$.
On a égalité entre ces deux ensembles :

$$\bigcup_{b \in A} h_i^{*-1}(bu) = \bigcup_{b \in A} \{bv : v \in h_{i+1}^{*-1}(u)\}$$

Or $\forall b \in A, |h_i^{*-1}(bu)| \leq |h_{i+1}^{*-1}(u)|$ et $|h_i^{*-1}(au)| = p_i < p_{i+1} \leq |h_{i+1}^{*-1}(u)|$, donc

$$\left| \bigcup_{b \in A} h_i^{*-1}(bu) \right| < |A| \cdot |h_{i+1}^{*-1}(u)|$$

Mais d'un autre côté,

$$\left| \bigcup_{b \in A} \{bv : v \in h_{i+1}^{*-1}(u)\} \right| = |A| \cdot |h_{i+1}^{*-1}(u)|$$

On obtient une contradiction, donc $p_i = p_{i+1}$. □

On pose p la valeur commune à tous les p_i .

Lemme 3.20. $p = |A|^{2r}$

Démonstration. Soit u tel que $|h_1^{*-1}(u)| = p$, soit v tel que $|h_{|u|+2r}^{*-1}(v)| = p$.
 Nous avons l'égalité des deux ensembles suivants

$$\left\{ xy : (x \in h_1^{*-1}(u)) \wedge (y \in h_{|u|+2r}^{*-1}(v)) \right\} = \bigcup_{z \in A^{2r}} h_1^{*-1}(uzv)$$

Or d'après le lemme 3.18, $\forall z \in A^{2r}, |h_1^{*-1}(uzv)| = p_1 = p$. On en déduit que

$$p^2 = \left| \left\{ xy : (x \in h_1^{*-1}(u)) \wedge (y \in h_{|u|+2r}^{*-1}(v)) \right\} \right| = \left| \bigcup_{z \in A^{2r}} h_1^{*-1}(uzv) \right| = p \cdot |A|^{2r}$$

□

On peut alors finir la preuve de la réciproque, supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ et $u \in A^*$ tel que $|h_i^{*-1}(u)| > |A|^{2r}$. Alors

$$|A|^{|u|+2r} = \left| \bigcup_{v \in A^{|u|}} h_i^{*-1}(v) \right| > |A|^{|u|} \cdot |A|^{2r}$$

On obtient une contradiction.

□

Dans le cadre des AC, la permutivité et la surjectivité sont intimement liés à la dynamique de l'automate, quelques uns de ces résultats classiques passent aux ACP. Les preuves des trois théorèmes suivants sont rigoureusement identiques à celle sur les AC, on pourra donc se référer à [Kur04].

Théorème 3.21. *Un ACP de type II permutif est surjectif.*

Théorème 3.22. *Un point d'un ACP de type II surjectif est nonwandering*

Théorème 3.23. *Si $(A^{\mathbb{Z}}, H)$ est un ACP de type II surjectif de rayon r , alors*

$$\forall y \in A^{\mathbb{Z}}, |H^{-1}(y)| \leq |A|^{2r}$$

3.5 Décidabilité

Dans cette partie, on étend la notion de graphe de De Bruijn aux ACP de type I pour démontrer des résultats de décidabilité. Pour une définition des graphes de De Bruijn sur les automates cellulaires, on pourra se reporter à [Dur98].

Définition 3.24. *Soit H un ACP de type I et de rayon r sur un alphabet A , il existe un naturel k et une fonction $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que*

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, |i| > k \Rightarrow H(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

et pour $i \in \{-k, \dots, k\}$, il existe une fonction $h_i : A^{2r+1} \rightarrow A$ telle que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

Le **graphe de De Bruijn** de H est alors défini par $G = (E, V)$ où
 - $E = A^{2r} \times \{-k-1, \dots, k+1\}$ est l'ensemble des sommets de G .

- V est l'ensemble des arêtes de G , chaque arête porte une étiquette qui est un élément de $A \times \{0, 1\}$. $v = ((a, i), (b, j)) \in V$ si et seulement si $\forall i \in \{0, \dots, 2r - 1\}, a_i = b_{i+1}$ et l'une des conditions suivantes est vérifiée
 - $i = j = -k - 1$, en ce cas l'étiquette de v est $(f(a_0b), 0)$
 - $i + 1 = j$, en ce cas l'étiquette de v est $(h_k(a_0b), 0)$ (par convention $h_{-k-1} = f$)
 - $i = j = k + 1$, en ce cas l'étiquette de v est $(f(a_0b), 1)$

Dans un graphe de ce type, une configuration peut-être interprétée comme une suite bi-infinie de sommets connectés qui passe par l'indice 0 (cette position permet de déterminer où s'appliquent les perturbations). L'image d'une configuration est la suite des labels utilisés par les sommets, on peut déterminer l'emplacement des perturbations par rapport au premier '1' rencontré dans les labels.

Théorème 3.25. *La surjectivité est décidable pour les ACP de type I.*

Démonstration. La preuve est basée sur la preuve du théorème 3.17 (dont on reprend les notations en sus de celles introduites ci-dessus). Plus précisément, nous allons montrer qu'un ACP H de type I est surjectif si et seulement si son graphe de De Bruijn reconnaît le langage $(A \times \{0\})^* \cdot (A \times \{1\})^*$ (on considère que tous les états sont à la fois initiaux et finaux). On notera parfois (a_1, a_2) un mot de $(A \times \{0, 1\})^*$ en considérant en fait les projections selon chaque composante.

Supposons que H soit surjectif, soit $u \in (A \times \{0\})^* \cdot (A \times \{1\})^*$, on note n le nombre de '0' (en deuxième position de chaque lettre) apparaissant dans u :

- Si $n = 0$, il existe $v \in A^*$ tel que $f(v) = u$ et on peut construire u par la suite de sommets

$$(v_{[0,2r)}, k + 1), \dots, (v_{[|v|-2r, |v|)}, k + 1)$$

- Si $0 < n < |u|$, il existe $v \in A^*$ tel que $h_{k+1-n}(v) = u$ et on peut construire u par la suite de sommets

$$(v_{[0,2r)}, u_0), \dots, (v_{[|v|-2r, |v|)}, u_{|v|-2r-1})$$

où

$$u_j = \begin{cases} -k - 1 & \text{si } k + 1 - n + j < k \\ k + 1 & \text{si } k + 1 - n + j > k \\ k + 1 - n + j & \text{sinon} \end{cases}$$

- Si $n = |u|$, il existe $v \in A^*$ tel que $f(v) = u$ et on peut construire u par la suite de sommets

$$(v_{[0,2r)}, -k - 1), \dots, (v_{[|v|-2r, |v|)}, -k - 1)$$

Réciproquement si G reconnaît $(A \times \{0\})^* \cdot (A \times \{1\})^*$, on se donne $y \in A^{\mathbb{Z}}$. Soit $n > k$, G reconnaît $(y_{[-n,n]}, 0^{n+k+1}1^{n-k})$ donc il existe $v \in A^*$ tel que $h_{-n}(v) = y_{[-n,n]}$ et X_n est non-vide. Par suite y admet une pré-image et H est surjectif. \square

4 Zoologie

Dans cette partie, nous allons présenter plusieurs exemples d'ACP qui illustrent les résultats précédents, contredisent des propriétés classiques dans les automates cellulaires ou amorcent des problématiques.

4.1 Exemples d'ACP pour les inclusions strictes des classes

4.1.1 $\mathcal{AC} \subsetneq \mathcal{P}_1$

Considérons la fonction $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

H est de type I mais n'est pas un AC car H ne commute pas avec le shift.

4.1.2 $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2$

Considérons la fonction $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

H est de type II. Supposons par l'absurde qu'il soit de type I. En ce cas, il existe deux naturels k et r et une fonction $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, |i| > k \Rightarrow H(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

Soit x la configuration qui ne comporte que des 0.

$$0 = H(x)_{2k+1} = f(0, \dots, 0) = H(x)_{2k+2} = 1$$

Ce qui est absurde. H est de type II mais pas de type I.

4.1.3 $\mathcal{P}_2 \subsetneq \mathcal{ACP}$

Considérons la fonction $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H(x)_i = x_0$$

H est un ACP. Supposons par l'absurde qu'il soit de type II. En ce cas, il existe un naturel r tel que pour tout entier i , il existe une fonction $h_i : A^{2r+1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = h_i(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$$

En particulier

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, x_0 = H(x)_{r+1} = h_{r+1}(x_1, \dots, x_{2r+1})$$

Ce qui est absurde. H est un ACP mais n'est pas de type II.

4.2 Un AC presque équicontinu donne un ACP de type I sensible

Dans cette section, on pose $A = \{0, 1, 2\}$. On définit la fonction $f : A^3 \rightarrow A$ par $\forall x, y \in A$

$$\begin{aligned} f(x, 0, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f(x, 1, y) &= \begin{cases} 2 & \text{si } x = 2 \text{ ou } y = 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ f(x, 2, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

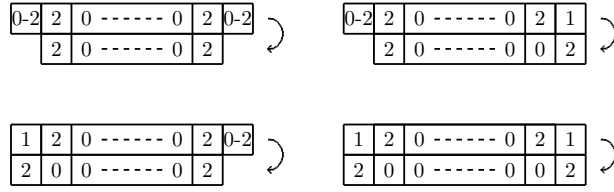


FIG. 3 – Motif préservé ou agrandi

Proposition 4.1. *L'automate cellulaire F de fonction locale f est presque-équicontinu.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'évolution dynamique préserve ou agrandit le motif 20^i2 et donc que 202 est un mot 1-bloquant (Fig 3). □

A partir de f , on définit un ACP $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut faire deux constatations immédiates concernant H , d'une part il est complètement symétrique par rapport à 0 et d'autre part les indices strictement positifs et strictement négatifs n'ont aucune influence les uns sur les autres. Il suffit donc d'étudier la restriction de H à $A^{\mathbb{N}}$.

Lemme 4.2. *Pour tout $u \in A^*$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\forall n > n_0, H^n(u0^\infty)_1 = 1$.*

Démonstration. Soit $u \in A^*$, on note $x^{(i)}$ la suite $H^i(u0^\infty)$ et on définit les fonctions N et P par $\forall x \in \{x^{(i)} : i \in \mathbb{N}\}$,

$$\begin{aligned} N(x) &= |\{i \in \mathbb{N} : x_i = 2\}| \\ P(x) &= |\{i \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, x_{[i, i+2k+2]} = 10^k 20^k 1\}| \end{aligned}$$

On va s'intéresser aux variations de la suite $y_n = (N+P)(x^{(n)})$. Pour ce faire, on va interpréter de manière locale les variations des fonctions N et P entre deux configurations $x^{(n)}$ et $x^{(n+1)}$.

- Le seul événement qui permet de créer des '2' est la transformation du motif '121' en le motif '202'. Donc localement l'apparition d'un nouveau '2' se fait par la disparition d'un motif du type ' $10^k 20^k 1$ '.
- Par ailleurs, considérons un motif de la forme ' $10^k 20^k 1$ ' dans $x^{(n+1)}$ (ie il existe $i, k \in \mathbb{N}$ tels que $x_{[i, i+2k+2]}^{(n+1)} = 10^k 20^k 1$) et regardons ses antécédents possibles.
 - Si $i = 0$, les antécédents possibles sont $120^{k-1} 20^{k+1} 1$ et $120^{k-2} 2120^k 1$.
 - Si $i \neq 0$, les antécédents possibles sont $10^{k+1} 20^{k+1} 1$ et $10^k 2120^k 1$.
- C'est à dire qu'un tel motif existe dans $x^{(n+1)}$ s'il existait déjà dans $x^{(n)}$ ou si au moins un '2' a disparu.
- Enfin, ces deux comportements locaux sont indépendants.

Ces trois points permettent de dire que $(N+P)(x^{(n+1)}) \leq (N+P)(x^{(n)})$ et donc que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers décroissante; donc stationnaire à partir d'un certain rang, ie il existe $n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, y_n = y_{n_0}$.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $x^{(n_1)}_1 = 2$. Ce '2' disparaît à l'étape suivante, or comme la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir de l'indice n_0 , cette disparition est compensée quelque part. La seule possibilité est qu'il existe $k \geq 0$ tel que

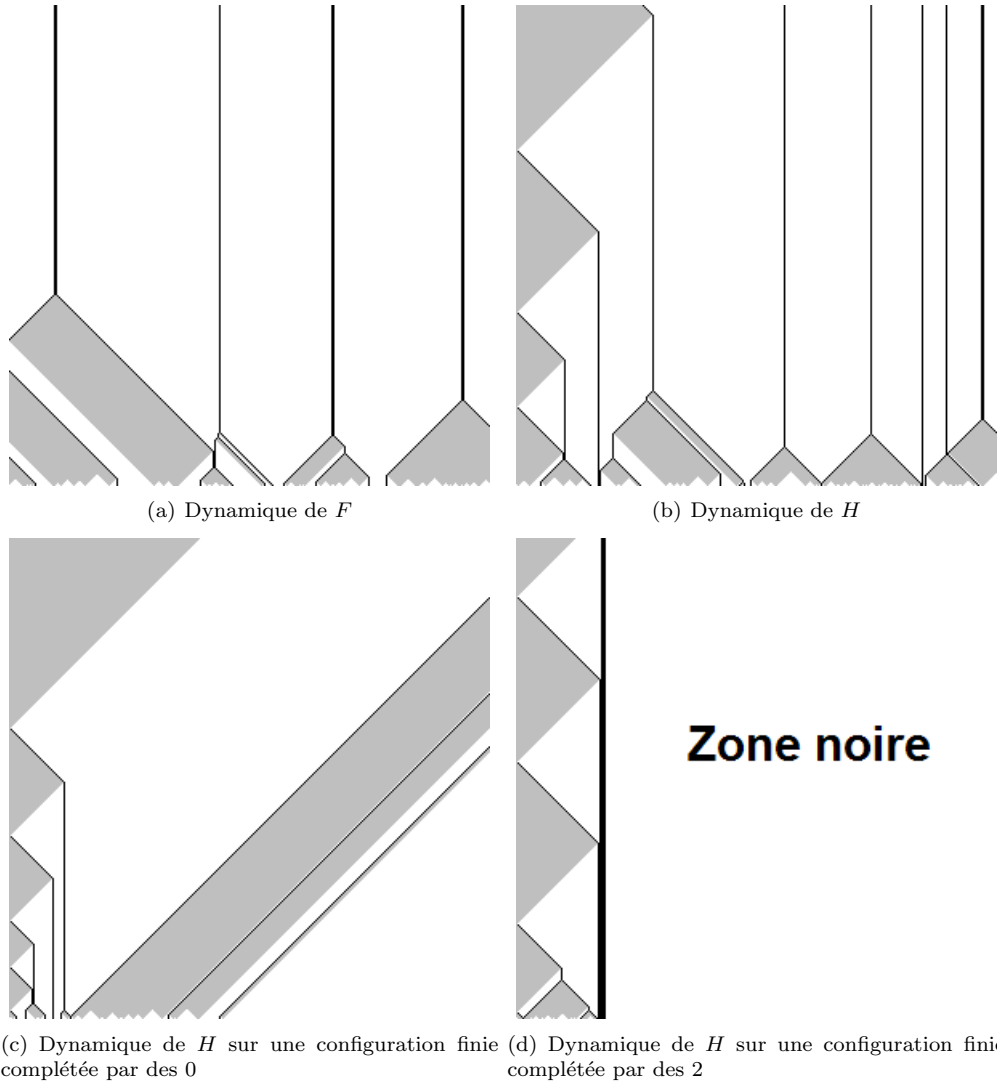


FIG. 4 – Diagrammes espace-temps pour F et H

	0	1	2		k	$k+1$	$k+2$		k'	$k'+1$		$2k+1$	$2k+2$
	↓	↓	↓		↓	↓	↓		↓	↓		↓	↓
\dots													
$x^{(n)}$	1	2
$x^{(n+1)}$	1	0	0	...	0	2	0	0	1
\dots													
$x^{(n+k+1)}$	1	1	1	...	1	2	1
$x^{(n+k+2)}$	1	1	1	...	2	0	2
\dots													
$x^{(n+2k+1)}$	1	2	0	...	0	0
$x^{(n+2k+2)}$	1	0	0	...	0	0	0	2
\dots													

FIG. 5 – Evolution dynamique de $u0^\infty$

$x_{[0,2k+2]}^{(n_1+1)} = 10^k 20^k 1$ car une compensation à un autre endroit contredirait l'étude que nous venons de faire.

Ces données permettent de connaître localement l'évolution dynamique de l'automate (Fig. 5). En particulier,

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, x_{[0,2k+2-i]}^{(n_1+i+1)} = 1^{i+1} 0^{k-i} 20^{k-i} 1$$

puis

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, x_{[0,k+1]}^{(n_1+k+i+1)} = 1^{k+1-i} 20^i$$

Mais alors lors du passage de $x^{(n_1+2k+1)}$ à $x^{(n_1+2k+2)}$ le même phénomène de disparition du '2' en position numéro 1 apparaît. Donc il existe $k' \in \{k+1, \dots, 2k+2\}$ tel que $x_{[0,2k'+2]}^{(n_1+2k'+2)} = 10^{k'} 20^{k'} 1$. Mais du fait que nous travaillons à y_n stationnaire et que nous disposons de certaines informations sur les antécédents, nous pouvons les reconstruire localement (des deux antécédents possibles, on choisit celui qui ne fait pas apparaître de '2'). D'où

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, x_{[0,2k'+2+i]}^{(n_1+2k+2-i)} = 1^i 20^{k'-i} 20^{k'+i} 1$$

et en particulier $x_{[0,2k'+k+2]}^{(n_1+k+2)} = 1^k 20^{k'-k} 20^{k'+k} 1$ mais on sait aussi que $x_{[0,k+2]}^{(n_1+k+2)} = 1^k 20^2$ et donc $k' = k+1$, d'où $x_{[0,3k+5]}^{(n_1+k+2)} = 1^k 20^2 20^{2k+2} 1$. Par ailleurs, $x_{[0,k+2]}^{(n_1+k+1)} = 1^{k+1} 21$ mais l'antécédent que nous venons de trouver impose $x_{k+2}^{(n_1+k+1)} = 0$ ce qui est absurde.

Donc $\forall n \geq n_0, H^n(u0^\infty)_1 \neq 2$ et par conséquent $\forall n > n_0, H^n(u0^\infty)_1 = 1$ \square

Lemme 4.3. *Pour tout $u \in A^*$, $\forall n_0 \geq 0, \exists n > n_0, H^n(u2^\infty)_1 = 2$.*

Démonstration. Soit $u \in A^*$, on note $x^{(i)}$ la suite $H^i(u2^\infty)$ et on définit la fonction A par

$$\forall x \in \{x^{(i)} : i \in \mathbb{N}\}, A(x) = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i = 2 \wedge \forall k > i, x_k \neq 1\}$$

On pose la suite $a^{(n)} = A(x^{(n)})$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, a^{(n)} > 1 \Rightarrow \exists k > n, a^{(k)} < a^{(n)}$. Il suffit pour cela de regarder l'évolution dynamique de $x^{(n)}$ et de remarquer qu'avant le 2 d'indice a_n , il y a un certain nombre i (éventuellement nul) de précédés d'un 1 (Fig. 6).

Et on a donc $a^{(n+i+1)} < a^{(n)}$. On en déduit immédiatement le lemme. \square

Proposition 4.4. *H est sensible.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes 4.2 et 4.3. \square

		$a^{(n)} - i - 1$	$a^{(n)} - i$		$a^{(n)} - 1$	$a^{(n)}$	
		↓	↓		↓	↓	
\dots							
$x^{(n)}$...	1	0	...	0	2	... $\neq 1 \dots$
$x^{(n+1)}$	1	...	0	2	... $\neq 1 \dots$
\dots							
$x^{(n+i)}$	1	2	... $\neq 1 \dots$
$x^{(n+i+1)}$	2	0	... $\neq 1 \dots$
\dots							

FIG. 6 – Evolution dynamique de $u2^\infty$

4.3 Un AC presque équicontinu donne un ACP de type I équicontinu

Dans cette section, on pose $A = \{0, 1, 2\}$. On définit la fonction $f : A^3 \rightarrow A$ par $\forall x, y, z \in A$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 2 \text{ ou } y = 2 \text{ ou } z = 2 \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit F l'AC de règle locale f . F est presque équicontinue car '2' est un mot bloquant mais n'est pas équicontinue car sa restriction à $\{0, 1\}^\mathbb{Z}$ est le shift qui est sensible.

On définit un ACP $H : A^\mathbb{Z} \rightarrow A^\mathbb{Z}$ par

$$\forall x \in A^\mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 0 \\ f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 4.5. *H est équicontinu.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x, y \in A^\mathbb{Z}$ tels que $x_{[-2n, 2n]} = y_{[-2n, 2n]}$. Alors

$$\forall k \leq n, H^k(x)_{[-n, n]} = H^k(y)_{[-n, n]}$$

car H est de rayon 1 et $\forall k > n, H^k(x)_{[-n, n]} = 2^{2n+1} = H^k(y)_{[-n, n]}$

Donc H est bien équicontinu. □

4.4 Quelques différences entre AC et ACP

Exemple 1

Dans cette section, on pose $A = \{0, 1\}$. On définit un ACP $H : A^\mathbb{Z} \rightarrow A^\mathbb{Z}$ par

$$\forall x \in A^\mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 4.6. *L'ensemble des points ultimement périodiques de H n'est pas dense.*

Démonstration. On note P l'ensemble des points périodiques pour H , UP l'ensemble des points ultimement périodiques et on définit l'ensemble $E = \{x \in A^\mathbb{Z} : \forall i \in \mathbb{N}, x_i = x_0\}$.

Soit $x \in P$, il existe $p > 0$ tel que $H^p(x) = x$. Supposons par l'absurde que l'ensemble $B = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq x_0\}$ soit non vide, notons $i_0 > 0$ le plus petit élément de cet ensemble. On remarque facilement que $\forall y \in A^\mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{N}, H^i(y)_{[0, i]} = y_0^{i+1}$ et donc $x_{i_0} = H^{p \cdot i_0}(x)_{i_0} = x_0$. Absurde, donc B est vide et $x \in E$, d'où $P \subseteq E$.

Soit $x \in H^{-1}(E)$, supposons par l'absurde que l'ensemble $B = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq x_0\}$ soit non vide, notons $i_0 > 0$ le plus petit élément de cet ensemble. $H(x)_{i_0+1} = x_{i_0} \neq x_0 = H(x)_0$ donc $H(x) \notin E$. Absurde, donc B est vide et $x \in E$, d'où $H^{-1}(E) \subseteq E$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, H^{-n}(E) \subseteq E$.

Finalement on a

$$UP = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(P) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(E) \subseteq E$$

et E n'est pas dense. □

Proposition 4.7. *H n'est pas surjective et toute configuration a 0 ou 2 pré-image.*

Démonstration. $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H(x)_0 = H(x)_1$ donc les configurations de l'ensemble

$$B_1 = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_0 \neq x_1\}$$

n'ont pas de pré-image. Soit $x \in B_2 = A^{\mathbb{Z}} \setminus B_1 = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_0 = x_1\}$, alors x a deux pré-images y et z telles que

$$\forall i \notin \{-1, 0\}, y_i = z_i = x_{i+1}; y_0 = z_0 = x_0; y_{-1} = 0; z_{-1} = 1$$

□

Ce dernier résultat montre que malgré le fait que H soit composé de règles locales qui induisent des AC surjectifs, il n'est pas lui-même surjectif. De plus à la différence des AC, un ACP non surjectif n'admet pas forcément un point avec un nombre non dénombrable de pré-images.

Exemple 2

Un résultat très connu des automates cellulaires est que la surjectivité globale est équivalente à l'injectivité sur les configurations finies (pour les AC admettant un état quiescent, ie un état q tel que $f(q, \dots, q) = q$). Ce résultat est connu sous le nom du théorème du Jardin d'Eden et a été prouvé par Moore [Moo62] et Myhill [Myh63]. Ce théorème ne tient pas sur les ACP.

Plus formellement, si F est un AC admettant un état quiescent q , une configuration finie sur F est un élément $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $k \geq 0$ tel que $\forall i \in \mathbb{Z}, |i| \geq k \Rightarrow x_i = q$.

Par extension on dit qu'un état q est quiescent pour un ACP H si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, q est quiescent pour l'AC de règle h_i . La notion de configuration finie est alors exactement identique à celle sur les AC.

On pose $A = \{0, 1\}$. On définit un ACP $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} \oplus x_{i+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

où \oplus désigne le XOR logique, ie $x \oplus y = x + y \pmod 2$.

Cet ACP admet 0 comme état quiescent.

Proposition 4.8. *H est injectif sur les configurations finies mais n'est pas surjectif.*

Démonstration. Soit x et y deux configurations finies telles que $H(x) = H(y)$. Supposons par l'absurde que $x \neq y$, comme le problème est symétrique par rapport à 0, cela revient à dire qu'il existe $i \geq 0$ tel que $x_i \neq y_i$. Or

$$x_i \oplus x_{i+2} = H(x)_{i+1} = H(y)_{i+1} = y_i \oplus y_{i+2}$$

donc $x_{i+2} \neq y_{i+2}$ et par récurrence

$$\forall j \in \mathbb{N}, x_{i+2j} \neq y_{i+2j}$$

Mais alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, (x_{i+2j} = 1) \vee (y_{i+2j} = 1)$$

ce qui contredit que x et y sont des configurations finies. Donc $x = y$ et H est injectif sur les configurations finies cependant il n'est clairement pas surjectif. \square

D'autres propriétés classiques sur les AC sont mises en défaut sur cet ACP.

Proposition 4.9. *H est expansif mais n'est pas transitif.*

Démonstration. Soit x et y deux configurations distinctes de $A^{\mathbb{Z}}$, par symétrie par rapport à 0 on peut supposer que $\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq y_i\}$ est non vide et on note k son plus petit élément. Si $k \leq 1$, $d(H^0(x), H^0(y)) \leq \frac{1}{2}$, sinon $(H(x)_{k-1} = x_{k-2} \oplus x_k \neq y_{k-2} \oplus y_k = H(x)_{k-1}) \wedge (H(x)_{[0, k-2]} = H(y)_{[0, k-2]})$ et par récurrence on montre alors que $H^{k-1}(x)_1 \neq H^{k-1}(y)_1$ d'où $d(H^{k-1}(x), H^{k-1}(y)) \leq \frac{1}{2}$. Donc H est expansif de constante d'expansivité $\frac{1}{2}$ mais n'est clairement pas transitif ni surjectif. \square

Exemple 3

On pose $A = \{0, 1\}$. On définit un ACP $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si } i < 0 \\ x_0 & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Proposition 4.10. *H est injective mais non-surjective.*

Démonstration. On remarque que seules les configurations x vérifiant $x_{-1} = x_0 = x_1$ ont une pré-image donc H n'est pas surjectif.

Soit x et y tels que $H(x) = H(y)$ alors $\forall i > 0, x_{i-1} = y_{i-1}$ et $\forall i < 0, x_{i+1} = y_{i+1}$ d'où $x = y$ et H est injectif. \square

5 Problèmes ouverts et perspectives

Ce travail a permis de mettre en évidence des premières propriétés des ACP, cependant leur étude n'en est encore qu'au stade préliminaire et de nombreuses questions restent en suspens. En voici quelques unes parmi celles qui nous paraissent les plus pertinentes.

Nous avons vu qu'il existe une caractérisation topologique pour les automates cellulaires ainsi que pour les automates cellulaires perturbés, il serait intéressant de savoir s'il en va de même pour les deux sous-classes d'automates cellulaires perturbés.

Plusieurs questions demeurent ouvertes quant à la stabilité des ACP et le rapport entre un AC de règle locale f et un ACP de règle principale f . Nous ne savons pas par exemple si la dichotomie entre AC sensibles et AC presque équicontinus reste valide pour les ACP. De même si nous disposons d'un AC de règle locale f et d'un ACP de règle principale f est-ce que les assertions suivantes sont vérifiées ?

- F sensible $\Rightarrow H$ sensible
- F expansif $\Rightarrow H$ expansif
- H presque-équicontinu $\Rightarrow F$ presque-équicontinu

Enfin dans la section 4.4, nous avons exhibé un ACP de type I qui est injectif sur les configurations finies mais non surjectif et un ACP de type II qui est injectif mais non surjectif. Nous cherchons toujours à savoir s'il existe un ACP de type I injectif et non surjectif.

Une des approches que nous avons tentée mais que nous n'avons pas développée pour l'instant a été de trouver une alternative à la classification en terme d'importance des perturbations. Par exemple, nous avons cherché à mesurer la densité de différences structurelles entre un AC et un ACP (et plus généralement entre deux ACP) en se basant sur la distance de Besicovitch. Si F et H sont deux ACP de type II alors

$$d(F, H) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{i \in \{-n, \dots, n\} : f_i \neq h_i\}|}{2n + 1}$$

où f_i et h_i sont les règles locales de F et H de même rayon. Cette distance semble intéressante car on peut notamment avoir une traduction de la compatibilité. Cependant, elle présente des inconvénients et est à raffiner.

Remerciements

Dans le cadre de ce stage, je tiens à remercier mes tuteurs Alberto Dennunzio, Gianpiero Cattaneo et Enrico Formenti. Je tiens également à remercier l'équipe du laboratoire I3S pour son accueil, Jacques Mazoyer pour son soutien et Philippe Audebaud pour ses conseils.

Références

- [Ace06] L. Acerbi. Variants of cellular automata. topological dynamics and associated formal languages. Master's thesis, Università degli studi di Milano - Bicocca, 2006.
- [AP72] S. Amoroso and Y. N. Patt. Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *Journal of Computer and System Sciences*, 6 :448–464, 1972.
- [CFM00] G. Cattaneo, M. Finelli, and L. Margara. Investigating topological chaos by elementary cellular automata dynamics. *Theoretical computer science*, (244) :219–241, 2000.
- [Dur98] B. Durand. *Global properties of cellular automata*. In E. Goles and S. Martinez, editors, Kluwer, 1998.
- [Hed69] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical Systems Theory*, 3 :320–375, 1969.
- [Kel75] J. L. Kelley. *General Topology*. Springer-Verlag, 1975.
- [Kur97] P. Kurka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17 :417–433, 1997.
- [Kur04] P. Kurka. *Topological and symbolic dynamics*, volume 11 of *Cours spécialisés*. Société mathématique de France, 2004.
- [Moo62] E. F. Moore. Machine models of self-reproduction. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 14 :13–33, 1962.
- [Myh63] J. Myhill. The converse to Moore's garden-of-eden theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 14 :685–686, 1963.