Contrôle continu de logique

Tous documents autorisés, durée 2 heures. Prenez soin de justifier vos résultats

Notations (rappel):

- x, y, z : variables
- a, b, c, d : constantes
- p, q, r, s : symboles de prédicat
- f, g : symboles de function
- P, Q, R, S : propositions
- A, τ, Φ : formules

Tous ces symboles peuvent éventuellement être indicés.

1 Satisfiabilité et validité (7 points)

1. Pour chacune des formules ci-dessous, utilisez la méthode de votre choix (table de vérité, simplification jusqu'à l'obtention d'une formule dont la validité est triviale à déterminer) pour montrer qu'elle est universellement valide, uniquement valide dans certaines interprétations, ou fausse.

   - Φ_1 : $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
   - Φ_2 : $\neg P \Rightarrow P$
   - Φ_3 : $\neg((\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P))$
   - Φ_2 : $P \Rightarrow (R \wedge S)$

$\Phi_1 : (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$. Donc Universellement valide.

$\Phi_2 \equiv \neg P \vee P \equiv P$: valide dans $I_1 = \{P = \text{Vrai }\}$; Faux dans $I_2 = \{P = \text{Faux }\}$.

$\Phi_3 \equiv \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge P \wedge Q$, ce qui est toujours faux

Φ_4 : Si on construit la table de décision on voit que Φ_4 : est valide dans les interprétations où P est faux et dans celle où P, Q et R sont vrais.

---

2. Donnez une interprétation où $\Phi_5 = \forall x \forall y \ (p(g(x), z) \Rightarrow p(f(y, x), z))$ est valide, une interprétation où Φ_5 est satisfiable et une interprétation où Φ_5 est fausse.

$\Phi_5 \equiv \forall x \forall y \ (\neg p(g(x), z) \vee p(f(y, x), z)$

Φ_5 est valide dans $I_{Valide} = \{\mathcal{D} : \mathbb{N},\ f(y, x) \rightarrow x,\ g(x) \rightarrow x,\ p : \text{relation d'égalitée} =\}$. Ce qui donne $\forall x \ \neg(x = z) \ \vee (x = z)$

Φ_5 est satisfiable dans $I_{satisfiable} = \{\mathcal{D} = \{1,2,3\},\ \ f(x,y) = \max(x,y),\ \ g(x) \rightarrow x$, p est la relation d'ordre non stricte $\leq$. En effet, dans $I_{satisfiable}$, Φ_5 est vrai si $z = 3$ car $\forall x\, \forall y\ \max(x,y) \leq 3$ et Φ_5 est faux pour $z = 2$. En effet, pour $x = 1$ et $y = 3$, $(\neg(1 \leq 2) \vee max(3,1) \leq 2)$ est faux.

Φ_5 est fausse dans $I_{Fausse} = \{\mathcal{D} : \mathbb{N},\ \ f(y,x) \rightarrow x + y,\ g(x) \rightarrow x,\ p$: relation d'ordre d'égalite. En effet, quelque soit la valeur choisie pour z, $\forall x\, \forall y\ x \neq z\ \vee\ x + y = z$ est fausse.

---

2 Forme prénexes et Skolem (2 points)

Mettre les formules suivantes sous forme prénexe et sous forme skolem

1. $(\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y)))$

- Forme prénexe
  $(\forall x\ (\neg p(x) \vee \exists y\ q(x,y)))\ \equiv\ \forall x\ \exists y\ \neg p(x)\ \vee\ q(x,y)$
- Forme skolem
  $\neg p(x)\ \vee\ q(x, f(x))$

---

2. $(\exists x\ (p(x) \wedge \forall y\ q(x,y)))$

- Forme prénexe
  $(\exists x\ (p(x) \wedge \forall y\ q(x,y)))\ \equiv\ \exists x\ \forall y\ p(x) \wedge\ q(x,y)$
- Forme skolem
  $p(a) \wedge\ q(a,y)$

---

3 Formalisation (6 points)

Formalisez en calcul des prédicats du premier ordre les phrases ci-dessous. Vous ne devrez utiliser que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les connecteurs $\vee$ et $\wedge$, la négation $\neg$, l'implication $\Rightarrow$, les variables x, y, z, le symbole de fonction unaire *c(x)* qui retourne la couleur de x, la constante *verte*, et les symboles de prédicat suivants:

- *f(x)* : x est une femme;
- *b(x)*: x est belle;
- *m(x,y)*: x est la mère de y;
- *egal(x,y)*: x est égal à y.

Phrases:

(a) Toutes les femmes sont belles.

(b) Toutes les femmes ne sont pas belles

(c) Il existe des femmes dont la mère n'est pas belle

(d) Certaines femmes de couleur verte ne sont pas belles

(e) S'il existe une femme de couleur verte qui n'est pas belle, alors toutes les femmes qui ne sont pas de couleur verte sont belles

Transformer la formule associée à la phrase *(e)* et utiliser cette nouvelle formule pour donner une autre formulation en français.

---

a: $\forall x\; f(x) \;\Rightarrow b(x)$

b: $\neg(\forall x\; f(x) \;\Rightarrow b(x)) \;\equiv\; \exists x\; f(x) \wedge \neg b(x))$

c: $\exists x \exists y\; f(x) \;\wedge\; m(y,x) \;\wedge\; \neg b(y)$

d: $\exists x\; f(x) \;\wedge\; egal(c(x), verte) \;\wedge\; \neg b(x)$

e: $(\exists x\; f(x) \;\wedge\; egal(c(x), verte) \;\wedge\; \neg b(x)) \Rightarrow (\forall y\; (f(y) \wedge\; \neg egal(c(y), verte)) \Rightarrow b(y))$
$\equiv\; (\forall x\; \neg f(x) \;\vee\; \neg egal(c(x), verte) \;\vee\; b(x)) \vee (\forall y\; \neg f(y) \vee\; egal(c(y), verte) \vee b(y))$
C'est à dire: *toutes les femmes sont de couleur verte ou belles (ou non-exclusif).*

---

4 Résolution (8 points)

(a) En utilisant la 0-résolution, montrez que $\tau = \{A \vee C, C \Rightarrow (\neg B \vee D), B \wedge \neg D\}$ permet de déduire $\Phi = A \wedge B$.
Vous mettrez d'abord $\tau \wedge \neg\Phi$ sous forme de clauses

---

$C \Rightarrow (\neg B \vee D) \;\equiv\; \neg C \vee \neg B \vee D$

$\neg\Phi : \neg(A \wedge B) \;\equiv\; \neg A \vee \neg B$

- Forme Clausale
  $C_1 :\; A \vee C$
  $C_2 :\; \neg C \vee \neg B \vee D$
  $C_3 :\; B$
  $C_4 :\; \neg D$
  $C_5 :\; \neg A \vee \neg B$

- Résolution

  $C_1, C_5 \models C \vee \neg B$
  $C \vee \neg B, C_2 \models D \vee \neg B$
  $D \vee \neg B, C_3 \models D$
  $C_4, D \models \perp$

(b) En utilisant la 0-résolution, montrez que $\tau = \{A \vee B \vee C, D \vee C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg C, \neg B \vee C, \neg C \vee A\}$ est inconsistant

---

- Forme Clausale

$C_1 :\ A \vee B \vee C$
$C_2 :\ D \vee C$
$C_3 :\ \neg A \vee B$
$C_4 :\ \neg A \vee \neg C$
$C_5 :\ \neg B \vee C$
$C_6 :\ \neg C \vee A$

- Résolution

  $C_4, C_6 \models \neg C$
  $C_5, \neg C \models \neg B$
  $C_3, \neg B \models \neg A$
  $C_1, \neg C \models A \vee B$
  $A \vee B, \neg A \models B$
  $B, \neg B \models \perp$

(c) Soit l'énoncé suivant: *les hiboux sont des oiseaux. La nuit tous les oiseaux peuvent voler.* En utilisant la résolution, montrez que *la nuit tous les hiboux peuvent voler.* Pour formaliser cet énoncé, vous utiliserez les prédicats suivants:

· h(x) : x est un hiboux
· o(x): x est un oiseau
· v(x): x peut voler la nuit

Vous mettrez d'abord votre système sous forme prénexe, puis sous forme de skolem et enfin sous forme clausale.

- Forme prénexe:

$A_1 :\ \forall x\ h(x) \Rightarrow o(x)\ \equiv\ \forall x\ \neg h(x) \vee o(x)$
$A_2 :\ \forall x\ o(x) \Rightarrow v(x)\ \equiv\ \forall x\ \neg o(x) \vee v(x)$
$\neg\Phi :\ \neg(\forall x\ h(x) \Rightarrow v(x))\ \equiv\ \exists x\ h(x) \wedge \neg v(x)$

Attention: c'est les formes prénexe et de Skolem de $\neg\Phi$ qu'il faut défínr

- Forme de Skolem:

$A_1 :\ \neg h(x) \vee o(x)$
$A_2 :\ \neg o(x) \vee v(x)$
$\neg\Phi :\ h(a) \wedge \neg v(a)$

- Forme Clausale

$C_1 :\ \neg h(x) \vee o(x)$
$C_2 :\ \neg o(x) \vee v(x)$
$C_3 :\ h(a)$
$C_4 :\ \neg v(a)$

- Résolution

  $C_1, C_3 \models C_4$ avec l'unification $\{x|a\}$ et $C_5 \equiv o(a)$
  $C_5, C_2 \models C_6$ avec l'unification $\{x|a\}$ et $C_5 \equiv v(a)$
  $C_6, \neg\Phi \models \perp$ avec l'unification $\{x|a\}$
