TD Logique Feuille 0 – MAM3 - SI3

1 Vrai ou faux ?

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

- Si x est un nombre pair alors x + 1 est un nombre impair
- Si x est un nombre pair alors x + 1 est un nombre pair
- Si la lune est verte à pois bleus alors 3 = 2
- Si 3 = 2 alors les poules sont des végétaux
- Si 3 = 2 alors les hommes sont des mammifères
- Si 3 = 2 + 1 alors les poules sont des végétaux
- x est pair si et seulement si x + 1 est impair

De prime abord, on serait tenté de tenir le raisonnement suivant :

- Si on suppose que $x+1$ correspond à l'évaluation sur les entiers de cette expression, que "pair", "impair" et "+1" ont leur sens usuel alors "Si x est un nombre pair alors x + 1 est un nombre impair" est toujours vrai, que " x" soit pair ou impair; et "Si x est un nombre pair alors x + 1 est un nombre pair" est faux si x est pair, mais vrai si x est impair. Si on suppose que $x+1$ est une expression non-évaluée, alors les deux premières phrases sont uniquement vraies si x n'est pas un nombre pair.
- Si la lune est verte à pois bleus alors 3 = 2 - vrai sauf si on trouve un monde ou la lune est verte à pois bleus
- Si 3 = 2 alors les poules sont des végétaux - vrai
- Si 3 = 2 alors les hommes sont des mammifères - vrai
- Si 3 = 2 + 1 alors les poules sont des végétaux - faux si 3=2+1, mais vrai si l'égalité porte sur des expression non-évaluées puisque "3" n'est pas égal à "2+1"
- x est pair si et seulement si x + 1 est impair - vrai si l'on est bien en train de manipuler des entiers et qu'on est bien en train de travailler avec les notations usuelles

Mais dans un contexte de logique formelle, un tel raisonnement n'est pas approprié : il est indispensable de **définir explicitement la syntaxe et la sémantique** du langage utilisé. Ainsi, même si "x est un nombre pair", "x+1" n'est pas nécessairement la somme de x et de l'entier 1 (et donc pas nécessairement un nombre impair). "x+1" peut très bien ne pas correspondre à un entier, mais par exemple, à l'arbre syntaxique "+(x,1)". On peut ainsi trouver un langage où chacune des expressions peut être vraie ou fausse.

Deux points importants:

- l'implication logique $A \Rightarrow B$ n'est pas l'implication causale usuelle qui suppose que A est vrai;

- lors de la formalisation d'un problème, il est important de vérifier quel est le sens exact des expressions et le contexte où elles sont utilisées. En d'autres termes de définir précisément la syntaxe et la sémantique.

---

2 Tables de vérité

Ecrire la table de vérité des expressions :

1. $A \Rightarrow B$
2. $\neg A \vee B$
3. $\neg (A \vee B)$
4. $\neg A \wedge \neg B$
5. $A \wedge (B \vee C)$
6. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Que peut-on dire de $\neg A \vee \neg B$ et $\neg (A \wedge B)$? Que peut-on dire de $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$?

---

1. $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	V

2. $\neg A \vee B$

A	B	$\neg A \vee B$
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	V

On a donc deux écritures différentes pour la même expression... il y a donc équivalence sémantique entre $A \Rightarrow B$ et $\neg A \vee B$

3. $\neg (A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	F	F	V
F	V	V	F

4. $\neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg A \wedge \neg B$
V	V	F
V	F	F
F	F	V
F	V	F

On a là aussi deux écritures différentes pour la même expression. Il y a équivalence entre $\neg(A \vee B)$ et $\neg A \wedge \neg B$

5. $A \wedge \ (B \vee \ C)$

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

6. $(A \wedge \ B) \vee \ (A \wedge \ C)$

A	B	C	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Et à nouveau deux écritures différentes pour la même expression. Il y a équivalence entre $A \wedge (B \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ De même il y a équivalence entre $\neg(A \wedge B)$ et $\neg A \vee \neg B$ et équivalence entre $A \vee (B \wedge C)$ et $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

---

3 Forme normale

En utilisant les résultats de l'exercice 2, transformer les expressions :

- $\neg \ ((((A \Rightarrow B) \vee \ C) \wedge \ A) \vee \ (D \wedge \ \neg \ C)) \wedge \ B$
- $(A \Leftrightarrow \ B) \vee \ \neg \ ((C \wedge \ D) \vee \ (\neg \ D \vee \ A))$

pour quelles soient en forme normale conjonctive c'est à dire de la forme :

$p_1 \wedge \ p_2 \wedge \ p_3 \wedge \ .... \wedge \ p_n$

avec p_i de la forme :

$t_1 \vee \ t_2 \vee \ t_3 \vee \ .... \vee \ t_m$ où t_i est une variable ou la négation d'une variable.

Rappelons d'abord informellement l'intérêt de la CNF. La CNF est utilisée dans tous les solveurs SAT modernes dérivés de l'algorithme Davis-Putnam. L'heuristique la plus courante consiste à choisir la clause qui a le moins de littéraux (c'est elle qui sera le plus difficile à satisfaire), et choisir dans cette clause le littéral qui a le plus d'occurrences dans l'ensemble des autres clauses (pour maximiser la propagation).
Exemple:
Soit $\Phi = (A \vee \neg B) \ \wedge \ (\neg A \vee C \vee D) \ \wedge \ (\neg A \vee \neg C \vee B)$
On sélectionne la clause $(A \vee \neg B)$ et le littéral A. On affecte à A la valeur vrai (si cette affectation nous conduit à un échec, on refera le même raisonnement avec la valeur faux pour A), alors Φ se simplifie en :
$\Phi = (C \vee D) \ \wedge \ (\neg C \vee B)$. Si maintenant l'on choisi la première clause et l'on affecte à C la valeur vrai, on obtient : $\Phi = B$ et Φ est donc vrai si A, C et B sont vrais.
La mise sous forme normale est un problème difficile pour lequel il n'existe pas d'algorithme polynomial, et il est donc important d'en tenir compte lors de la formalisation d'un problème.

Pour les deux formules, les variables sont A, B, C et D.

- - $\neg[\{((A \Rightarrow B) \vee C) \wedge A\} \vee (D \wedge \neg C)] \wedge B$
  - $[\neg\{((A \Rightarrow B) \vee C) \wedge A\} \wedge \neg(D \wedge \neg C)] \wedge B$
  - $[\{\neg((A \Rightarrow B) \vee C) \vee \neg A\} \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
  - $[\{((A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \vee \neg A\} \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
  - $[(\{(A \wedge \neg B) \vee \neg A\} \wedge \{\neg C \vee \neg A\}) \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
  - $[(\{(A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)\} \wedge \{\neg C \vee \neg A\}) \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
    Et on obtenu une forme normale conjonctive, que l'on peut simplifier en
    $(\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee C) \wedge B$
    puis en
    $\neg A \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee C) \wedge B$
    et enfin en $\neg A \wedge B \wedge (\neg D \vee C)$
- - $(A \Leftrightarrow B) \vee \neg\{(C \wedge D) \vee (\neg D \vee A)\}$
  - $(A \Leftrightarrow B) \vee \{(\neg C \vee \neg D) \wedge (D \wedge \neg A)\}$
  - $[(A \Leftrightarrow B) \vee (\neg C \vee \neg D)] \wedge [(A \Leftrightarrow B) \vee (D \wedge \neg A)]$
  - $[((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg C \vee \neg D)] \wedge [((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (D \wedge \neg A)]$
  - $([((A \vee \neg B) \vee (\neg C \vee \neg D)] \wedge [((\neg A \vee B)) \vee (\neg C \vee \neg D)]) \wedge ([(A \vee \neg B) \vee (D \wedge \neg A)] \wedge [(\neg A \vee B) \vee (D \wedge \neg A)])$
  - $(A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B \vee D) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg A)$

  J'ai obtenu une forme normale conjonctive,

---

4 C'est la fête

1. Le BDE organise une fête à Polytech'Nice. Pour éviter que la fête ne dégénère, ils ont organisé un test pour laisser entrer seulement les plus futés des Polytech'Niciens.

   Le BDE a posé trois boîtes sur le parvis de la cafétéria. La première boîte est blanche, la deuxième est bleue, la troisième est multicolore. Ils ont caché dans une de ces boîtes le badge qui permet d'accéder à la cafétéria. Sur la boîte blanche ils ont écrit : "le badge est dans cette boîte", sur la boîte bleue ils ont écrit : "le badge n'est pas dans cette boîte" et sur la boîte multicolore ils ont écrit : "le badge n'est pas dans la boîte blanche".

   Ils ont expliqué qu'une seule au plus de ces affirmations est vraie.

   Quelle boîte ouvrir pour accéder à la cafétéria ?

2. Les filles sont les seules à avoir réussi le test d'entrée. Pour que les garçons puissent s'amuser, le BDE leur donne une nouvelle chance.

   Ils modifient les inscriptions sur les boîtes et écrivent sur la boîte blanche : " le badge n'est pas dans la boîte bleue", sur la boîte bleue : " le badge n'est pas dans cette boîte" et sur la boîte multicolore "le badge est dans cette boîte".

   Ils ont expliqué aux garçons qu'une au moins de ces affirmations est vraie et une au moins de ces affirmations est fausse.

   Les garçons parviendront-ils à rejoindre les filles ?

---

1. On peut examiner les trois cas possibles
    - Le badge est dans la boite blanche: dans ce cas les deux affirmations des boîtes blanche et bleue sont vraies, ce qui est contradictoire
    - Le badge est dans la boite bleue, alors seule l' affirmations de la boite multicolore est juste
    - Le badge est dans la boite multicolore, alors les affirmations des boites bleue et multicolores sont justes ce qui est contradictoire

   Le seul cas possible si le BDE n'a pas menti est que le badge est dans la boîte bleue
2. Examinons à nouveau les trois cas possibles
    - Le badge est dans la boite blanche: dans ce cas les deux affirmations des boîtes blanche et bleu sont vrai, celle de la boite multicolore fausse
    - Le badge est dans la boite bleue, alors les trois affirmations sont fausses
    - Le badge est dans la boite multicolore, alors les trois affirmations sont justes

   Le badge est donc dans la boîte blanche

Plus formellement :

On peut modéliser le premier cas de la manière suivante :

- B_1: Le badge est dans la boite blanche
- B_2: Le badge est dans la boite bleu
- B_3: Le badge est dans la boite multicolore

Les 3 affirmations, correspondent donc à :

- $A_1 : B_1$
- $A_2 : \neg B_2$
- $A_3 : \neg B_1$

Au plus une de ces affirmation est vraie, et on peut modéliser ce problème par la formule $\Phi : (\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_3)$ qui se simplifie en B_2

On peut modéliser le second cas de la manière similaire par:

- $A_1 : B_2$
- $A_2 : \neg B_2$
- $A_3 : B_3$

Au plus une de ces affirmations est vraie et au moins une de ces affirmation est fausse, et on peut modéliser ce second problème par la formule $\Phi_1 = (A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3)$ qui se simplifie en $\Phi_1 = (\neg B_2 \vee B_3) \wedge (B_2 \vee \neg B_3)$ ... qui permet d'avoir un badge dans chaque boite !!
...et on s'aperçoit que notre formalisation était incomplète (y compris dans le premier cas !) car on n'a pas spécifié qu'il y avait un et un seul badge !
Il faut donc ajouter $\Phi_2 = (B_1 \vee B_2 \vee B_3) \wedge \neg(B_1 \wedge B_2) \wedge \neg(B_1 \wedge B_3) \wedge \neg(B_2 \wedge B_3)$
$\Phi_1 \wedge \Phi_2$ se simplifie en $B_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg B_3$ qui correspond bien à la solution.

---

5 Cherchez la princesse (ou le tigre, chacun son goût!)

On a deux cellules, il faut en ouvrir une. Dans chaque cellule il y a soit un tigre, soit une princesse. Sur chaque porte de cellule il y a un écriteau (E1 sur la cellule 1 et E2 sur la cellule 2) où est inscrit :

sur E1 : il y a au moins une princesse

sur E2 : il y a une princesse dans l'autre cellule

On sait que :

s'il y a une princesse dans la cellule 1 alors E1 est vrai

s'il y a un tigre dans la cellule 1 alors E1 est faux

s'il y a une princesse dans la cellule 2 alors E2 est faux

s'il y a un tigre dans la cellule 2 alors E2 est vrai

S'il y a un tigre dans la cellule 1 alors il n'y a pas de princesse (puisque E1 est faux), il y a donc un tigre dans la cellule 2,mais alors il y a une princesse dans la cellule 1, contradiction

Il y a donc une princesse dans la cellule 1. S'il y a une princesse dans la cellule 2, alors il y a un tigre dans la cellule 1 (puisque E2 doit être faux), contradiction, il y a donc un tigre dans la cellule 2

On vérifie qu'alors E1 et E2 sont vrais, et les 4 implications aussi, le système ne comportait pas de contradiction.

Plus formellement :

On peut modéliser ce problème de la manière suivante :

- PC_1: Il y a une princesse dans la cellule C_1
- PC_2: Il y a une princesse dans la cellule C_2
- TC_1: Il y a un tigre dans la cellule C_1
- TC_2: Il y a un tigre dans la cellule C_1

Dans chaque cellule, il y a soit un tigre, soit une princesse s'exprime par :
$\Phi_1 = (PC_1 \vee TC_1) \ \wedge \ \neg(PC_1 \wedge TC_1) \ \wedge \ (PC_2 \vee TC_2) \ \wedge \ \neg(PC_2 \wedge TC_2)$
Les 4 phrases correspondent à :

$\Phi_2 = \ PC_1 \Rightarrow E_1$ avec $E_1 = PC_1 \vee PC_2$

$\Phi_3 = \ TC_1 \Rightarrow (PC_1 \vee PC_2)$

$\Phi_4 = \ PC_2 \Rightarrow \neg PC_1$

$\Phi_5 = \ TC_2 \Rightarrow PC_1$

On peut remarquer que $PC_1 = \neg TC_1$ et $PC_2 = \neg TC_2$ et $\Phi_1 \ \wedge \ \Phi_2 \ \wedge \ \Phi_3 \ \wedge \ \Phi_4 \ \wedge \ \Phi_5$ se simplifie alors en $PC_1 \ \wedge \ TC2$

---

6 Un peu de science fiction

Sur la planète Manicheos, les habitants soit disent toujours la vérité, soit mentent toujours. Ils ne savent répondre aux questions que par oui ou non. Une charmante terrienne est égarée et à la recherche d'une station service pour faire le plein d'hydrogène. Elle arrive à un carrefour à deux branches dont l'une exactement mène à la station service. Devant ce carrefour, un habitant de Manicheos est en train de prendre un bain de Saturne.

Quelle question notre terrienne doit-elle lui poser pour être sûre de trouver la station service?

"Me répondriez-vous *oui* si je vous demandais si la station-service est à gauche ?"

Si Manichéen ne ment jamais il répondra oui si et seulement si elle est à gauche. Si il ment tout le temps il répondra aussi oui si et seulement si elle est à gauche.
