TD Logique Feuille 1 MAM3 - SI3

Syntaxe

1 Formules

On considère les symboles suivants :

Symboles de prédicats : {P(0-aire), Q(0-aire), p(2-aire), q(2-aire)}

Symboles de fonctions : {a(0-aire), b(0-aire), f(3-aire), g(2-aire)}

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules logiques du premier ordre ?

1. $\forall\, x\ (P \vee p(x, f(Q, a, b))) \wedge \neg a$
2. $\forall\, x\ (P \vee p(x, f(x, a, b))) \wedge \neg Q$
3. $\forall\, P\ (P \vee p(x, f(y, a, b))) \wedge \neg Q$
4. $\exists\, x\ \forall\, y\ q(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$

---

1. 1 n'est pas une formule logique du premier ordre car on n'a pas le droit de nier une constante
2. 2 est une formule logique du premier ordre car
   - Q proposition est un atome, donc une formule donc $\neg Q$ est une formule
   - x, a et b sont des termes , f est une fonction d'arité 3 donc $f(x, a, b)$ est un terme
   - p est un prédicat d'arité 2, x et $f(x, a, b)$ sont des termes, donc $p(x, f(x, a, b))$ est un atome et donc une formule
   - P étant une proposition est un atome et donc est une formule
   - donc $(P \vee p(x, f(x, a, b))$ est une formule dont x est une variable
   - donc $\forall x(P \vee p(x, f(x, a, b))$ est une formule
   - donc $\forall x(P \vee p(x, f(x, a, b)) \wedge \neg Q$ est une formule
3. 3 n'est pas une formule, car P n'étant pas une variable, on ne peut écrire $\forall P....$
4. - Q proposition est un atome, donc une formule donc $\neg Q$ est une formule
   - p est un prédicat d'arité 2, x et y sont des termes, donc $p(x, y)$ est un atome et donc une formule
   - donc $(p(x, y) \wedge \neg Q)$ est une formule
   - g est une fonction d'arité 2, x et a sont des termes, donc $g(x, a)$ est un terme
   - $g(x, a)$ et x sont des termes, q est un prédicat d'arité 2 donc $q(x, g(x, a))$ est une formule

- donc $q(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$ est une formule dont x et y sont des variables
- $\forall\, yq(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$ est donc une formule dont x et y sont des variables
- $\exists\, x\forall y\; q(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$ est donc une formule

---

2 Un peu de formalisation

Soit le predicat $H(x)$ qui signifie "x est un humain", le prédicat $LG(x)$ qui signifie "x est une langue" et le prédicat $P(x, y, z)$ signifie "x et y parlent la langue z".

Exprimer :

- tous les humains parlent une langue
- il existe une langue universelle pour les humains
- il existe une personne qui parle toutes les langues
- deux humains quelconques peuvent communiquer par le biais d'un interprète.

On suppose que "personne" et "interprète" sont des humains.

- tous les humains parlent une langue : $\forall x(H(x) \Rightarrow (\exists y\; (LG(y)\; \wedge P(x, x, y))$
- il existe une langue universelle pour les humains: $\exists y(LG(y) \wedge (\forall x(H(x) \Rightarrow p(x, x, y)))$
- il existe une personne qui parle toutes les langues : $\exists x(H(x) \wedge (\forall y(LG(y) \Rightarrow p(x, x, y)))$
- deux humains quelconques peuvent communiquer par le biais d'un interprète.
  $\forall x_1 \forall x_2[(H(x_1) \wedge H(x_2)) \Rightarrow (\exists x_3\; \exists y_1\; \exists y_2\; H(x_3) \wedge LG(y_1) \wedge LG(y_2) \wedge p(x_1, x_3, y_1) \wedge p(x_2, x_3, y_2)]$

---

3 Ambigüité de la langue naturelle

- En notant H(x) le fait que x est un homme et M(x) le fait que x est mortel exprimer : "tous les hommes sont mortels"
- En notant H(x) le fait que x est un homme et M(x) le fait que x est un menteur, exprimer "tous les hommes ne sont pas des menteurs"
- En notant H(x) le fait que x est un homme, F(x) le fait que x est une femme et B(x) le fait que x est bienvenu, exprimer : "hommes et femmes sont les bienvenus"

- $\forall x\; (H(x) \Rightarrow M(x))$
- $\exists x\; (H(x) \wedge \neg M(x))$
- $\forall x((H(x) \vee F(x)) \Rightarrow B(x))$
  ce qui est équivalent à $\forall x(H(x) \Rightarrow B(x)\;\; \wedge \forall x(F(x) \Rightarrow B(x))$

---

4 Formalisation (bis)

Soit le langage du premier ordre formé de l'ensemble des variables *V = {x, y, z}*, des symboles fonctionnels 0-aire *a,b*, du symbole fonctionnel 1-aire *emp*, des symboles de prédicat 1-aire *renouv* et des symboles de prédicat 2-aire *plusPerf, egal, inf*.

Dans ce langage, exprimer les énoncés suivants (expliquer comment vous avez interprété les symboles) :

1. Il existe des énergies renouvelables plus performantes que l'énergie nucléaire.
2. L'énergie solaire est l'unique énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire.
3. Il existe une énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire et qui est plus performante que les autres énergies renouvelables.
4. Si deux énergies renouvelables ont la même empreinte écologique, alors si l'empreinte écologique de la première est inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire, l'empreinte écologique de la seconde est aussi inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire.

En supposant que

- a représente l'énergie nucléaire
- b représente l'énergie solaire
- emp est une fonction d'arité un qui calcule l'empreinte écologique d'une énergie
- le domaine (pas encore défini à ce moment du cours) est celui des énergies
- $renouv$ est un prédicat unaire tel que $renouv(x)$ est vrai si et seulement si x est une énergie renouvelable
- $plusPerf(x, y)$ est vrai si et seulement si l'énergie x est plus performante que l'énergie y [on supposera qu'il s'agit d'un ordre strict]
- $inf(x, y)$ est vrai si et seulement si l'empreinte écologique de x est inférieure à l'empreinte écologique de y
- $egal(x, y)$ est vrai si et seulement si l'empreinte écologique de x est égale à l'empreinte écologique de y

Alors les énoncés peuvent s'exprimer comme

1. Est ce qu'on veut dire qu'il en existe au moins une ou au moins deux ?

   Si c'est au moins une on écrira $\exists x\ (renouv(x) \wedge plusPerf(x, a))$

   Si c'est au moins deux on écrira:

   $\exists x_1 \exists x_2\ (renouv(x_1) \wedge renouv(x_2) \wedge plusPerf(x_1, a) \wedge plusPerf(x_2, a) \wedge \neg egal(x_1, x_2)$
2. L'énergie solaire est l'unique énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire.
   $plusPerf(b, a) \wedge renouv(b) \wedge \forall x[(renouv(x) \wedge plusPerf(x, a)) \Rightarrow egal(x, b)]$
3. Il existe une énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire et qui est plus performante que les autres énergies renouvelables.

   $\exists x[renouv(x) \wedge plusPerf(x, a) \wedge (\forall y\ renouv(y) \Rightarrow plusPerf(x, y) \vee egal(x, y))]$ ou
   $\exists x[renouv(x) \wedge plusPerf(x, a) \wedge (\forall y\ (renouv(y) \wedge \neg egal(x, y)) \Rightarrow plusPerf(x, y))]$

4. Si deux énergies renouvelables ont la même empreinte écologique, alors si l'empreinte écologique de la première est inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire, l'empreinte écologique de la seconde est aussi inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire.
   $\forall x_1 \forall x_2((renouv(x_1) \wedge renouv(x_2) \wedge egal(emp(x_1), emp(x_2))) \Rightarrow (inf(emp(x_1), emp(a)) \Rightarrow inf(x_2, a)))$

---

5 De la musique

Exprimer "Certains polytech'Niciens ne deviendront jamais ni violoncellistes ni clarinettistes", puis prendre la négation logique de la formule correspondante et traduire en français la formule obtenue.

En notant

- "x est élève de Polytech Nice" par PolytechNice(x)
- " x deviendra unvioloncelliste " par violoncelliste (x)
- " x deviendra un clarinettiste" par clarinettiste(x)

La phrase "Certains polytech'Niciens ne deviendront jamais ni violoncellistes ni clarinettistes" peut s'écrire $\exists x\ PolytechNice(x) \wedge \neg Violoncelliste(x) \wedge \neg Clarinettiste(x)$

Sa négation est donc $\forall x\ \neg PolytechNice(x) \vee Violoncelliste(x) \vee\ Clarinettiste(x)$, qui est équivalente à $\forall x\ PolytechNice(x) \Rightarrow (Violoncelliste(x) \vee\ Clarinettiste(x))$ et peut s'exprimer en Français par " Tout élève de Polytech Nice deviendra violoncelliste ou clarinettiste."

---

6 Quantificateurs

On considère l'ensemble de couleurs {bleu, vert, rouge, jaune } et les deux phrases :

F1 : il existe une couleur primaire,

F2 : toutes les couleurs sont des couleurs primaires.

Formaliser ces deux phrases sans utiliser de quantificateur. Remarque : vous pouvez utiliser les connecteurs $\vee$ et $\wedge$ et utiliser le fait que le domaine est fini.

En notant primaire (x) le prédicat " x est une couleur primaire"

$F1$ peut se formuler comme $primaire(bleu) \vee primaire(vert) \vee primaire(rouge) \vee primaire(jaune)$

$F2$ peut se formuler comme $primaire(bleu) \wedge primaire(vert) \wedge primaire(rouge) \wedge primaire(jaune)$
