TD Logique Feuille 2 / MAM3 – SI3

Sémantique: Interprétation et validité

1 Validité

1. p(a,b) $\wedge$ $\neg$ p(f(a),b)
2. $\exists$ y p(y,b)
3. $\exists$ y p(y,x)
4. $\forall$ x $\exists$ y p(x,y)
5. $\forall$ x p(x,y)
6. $\exists$ y $\forall$ x p(x,y)
7. $\exists$ y ((p(y,a) $\vee$ p(f(y),b))

Soit l'interprétation I1 telle que:

- le domaine est les entiers naturels

- a est le chiffre 0

- b est le chiffre 1

- f est la fonction successeur

- p est la relation $<$

Les propositions précédentes sont elles valides dans l'interprétation I1?

Même question pour l'interprétation I2 :

- domaine : les listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1

- a est la liste vide

- b est la liste {1, 1, 1, 1, 1 }

- f est la fonction $cons_1$ qui ajoute un 1 en tête d'une liste

- p est la relation $length(x) < length(y)$

2 Interprétations

1. Trouver (si possible) une interprétation I_1 qui prouve que la formule Φ_1 $((\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))) \Leftrightarrow (\exists x(p(x) \wedge q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_2 où la formule Φ_1 est valide.

2. Même question en remplaçant dans Φ_1 tous les $\wedge$ par des $\vee$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_3 qui prouve que la formule Φ_2 $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x))) \Leftrightarrow (\exists x(p(x) \vee q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est valide.

3. Même question en remplaçant dans Φ_2 tous les $\exists$ par des $\forall$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_5 qui prouve que la formule Φ_3 $((\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))) \Leftrightarrow (\forall x(p(x) \vee q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est valide.

4. Même question en remplaçant dans Φ_3 tous les $\vee$ par des $\wedge$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_7 qui prouve que la formule Φ_4 $((\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x))) \Leftrightarrow (\forall x(p(x) \wedge q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_8 où la formule Φ_4 est valide.

5. Trouver une interprétation I dans laquelle la formule : $(\forall x\ \exists y\ p(x, y)) \wedge (\forall x \neg p(x, x))$ est valide. Cette formule peut-elle être valide pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

6. Trouver une interprétation I dans laquelle la formule :

   $(\forall\ x \exists\ y\ p(x, y)) \wedge\ (\forall\ x \neg p(x, x))$

   est valide.

   Cette formule peut-elle être valide pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

3 Interprétation et Validité

Soit le langage :

- variable : x , y

- symboles fonctionnels : f (arité 2), a (arité 0)

- symboles de prédicat : p (arité 2)

Soit l'interprétation I :

- domaine : les entiers positifs

- f est la fonction somme, a la constante 0

- p est l'égalité

Caractériser la validité des propositions suivantes (cf cours 3.20) :

1. $\forall$ x p(f(x,y),x)
2. ($\forall$ x p(f(x,y),x)) $\Rightarrow$ ($\exists$ x p(f(x,y),x))
3. $\forall$ x $\exists$ y p(f(x,y),a)
4. $\forall$ x $\forall$ y p(f(x,y),f(y,x))