TD Logique Feuille 2 / MAM3 – SI3

Sémantique: Interprétation et validité

1 Validité

1. p(a,b) ∧ ¬ p(f(a),b)
2. ∃ y p(y,b)
3. ∃ y p(y,x)
4. ∀ x ∃ y p(x,y)
5. ∀ x p(x,y)
6. ∃ y ∀ x p(x,y)
7. ∃ y ((p(y,a) ∨ p(f(y),b))

Soit l'interprétation I1 telle que:

- le domaine est les entiers naturels

- a est le chiffre 0

- b est le chiffre 1

- f est la fonction successeur

- p est la relation <

Les propositions précédentes sont elles valides dans l'interprétation I1?

Même question pour l'interprétation I2 :

- domaine : les listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1

- a est la liste vide

- b est la liste {1, 1, 1, 1, 1 }

- f est la fonction $cons_1$ qui ajoute un 1 en tête d'une liste

- p est la relation $length(x) < length(y)$

---

1. Dans I_1, on se place dans $\mathbf{N}$, les formules s'interprètent alors comme
   (a) $(0 < 1) \wedge \neg(1 < 1))$. Cette formule close est valide
   (b) $\exists y \ (y < 1)$ Cette formule close est valide : y peut prendre la valeur 0.

(c) $\exists y\ y < x$. Cette formule, n'est pas close. Elle n'est pas valide mais elle est satisfiable: pour une valuation qui affecte à x la valeur 0, cette formule est fausse; Pour une valuation qui affecte à x une valeur supérieure à 0, cette formule est vraie.

(d) $\forall$ x $\exists\ y < x$. Cette formule est valide car y peut prendre pour valeur le successeur de x.

(e) $\forall x\ (x < y)$. Cette formule est fausse car $<$ est un ordre strict dans **N**

(f) $\exists y\ \forall x\ \ (x < y)$. Cette formule est fausse pour le même raison que la précédente.

(g) $\exists y\ (y < 0 \vee y + 1 < 1)$. Cette formule close est fausse, car il n'existe aucun entier naturel négatif.

Dans la seconde interprétation I_2, on se place dans l'ensemble des listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1, les formules s'interprètent alors comme

(a) $0 < 5 \wedge \neg(1 < 5)$. Cette formule est fausse.

(b) $\exists y\ (length(y) < 5)$. Cette formule est valide: y peut prendre pour valeur la liste vide.

(c) $\exists y\ length(y) < length(x)$ est satisfiable pour toute valuation qui n'affecte pas à x la liste vide mais non-valide dans I_2 car fausse si x est égal à la liste vide.

(d) $\forall x \exists y\ length(x) < length(y)$ cette formule est valide dans I_2 car y peut prendre pour valeur la liste $cons_1(x)$.

(e) $\forall x\ length(x)\ <\ length(y)$ cette formule est fausse car x prendra nécessairement la valeur de y.

(f) $\exists y \forall x\ length(x)\ \ <\ \ length(y)$ cette formule est fausse car quelque soit la valeur de y, x pourra prendre la valeur $length(cons_1(y))$

(g) $\exists y\ ((length(y) < 0 \vee length(cons_1(y)) < 5))$. Cette formule est valide, car y peut prendre pour valeur une liste de moins de 5 éléments.

---

2 Interprétations

1. Trouver (si possible) une interprétation I_1 qui prouve que la formule Φ_1 $((\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))) \Leftrightarrow (\exists x(p(x) \wedge q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_2 où la formule Φ_1 est valide.

2. Même question en remplaçant dans Φ_1 tous les $\wedge$ par des $\vee$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_3 qui prouve que la formule Φ_2 $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x))) \Leftrightarrow (\exists x(p(x) \vee q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est valide.

3. Même question en remplaçant dans Φ_2 tous les $\exists$ par des $\forall$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_5 qui prouve que la formule Φ_3 $((\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))) \Leftrightarrow (\forall x(p(x) \vee q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est valide.

4. Même question en remplaçant dans Φ_3 tous les $\vee$ par des $\wedge$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_7 qui prouve que la formule Φ_4 $((\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x))) \Leftrightarrow (\forall x(p(x) \wedge q(x)))$ n'est pas universellement valide et une interprétation I_8 où la formule Φ_4 est valide.

5. Trouver une interprétation I dans laquelle la formule : $(\forall x\ \exists y\ p(x,y)) \wedge (\forall x \neg p(x,x))$ est valide. Cette formule peut-elle être valide pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

6. Trouver une interprétation I dans laquelle la formule :

   $(\forall\ x \exists\ y\ p(x,y)) \wedge\ \ (\forall\ x \neg p(x,x))$

   est valide.

   Cette formule peut-elle être valide pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

---

1. Pour I_1 on peut choisir comme domaine les entiers naturels, pour $p(x)$ le prédicat "x est pair" et pour q(x) " x est impair". La formule $((\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x)))$ est trivialement valide alors que la formule $(\exists x\ (p(x) \wedge q(x)))$ est fausse, aucun entier n'étant à la fois pair et impair.

   Φ_1 n'est donc pas valide pour l'interprétation I_1 et Φ_1 n'est donc pas universellement valide.

   Dans une interprétaion I' avec un domaine dans lequel il n'y a qu'un seul élément (et p et q deux prédicats quelconques), ou on peut choisir n'importe quel domaine et p=q. On aura alors $I' \models \Phi_1$

2. Ce n'est pas possible car Φ_2 est universellement valide. C'est à dire que pour toute interprétation I, on a $I \models \Phi_2$.

   En effet dans toute interprétation

   - Si $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$ alors
     - soit $((\exists x\ p(x))$ et alors soit x_1 tel que $p(x_1)$. On a aussi $p(x_1) \vee q(x_1)$ donc $(\exists x(p(x) \vee q(x)))$
     - soit $((\exists x\ q(x))$ et alors soit x_2 tel que $q(x_2)$. On a aussi $p(x_2) \vee q(x_2)$ donc $(\exists x(p(x) \vee q(x)))$

     Dans les deux cas, on a bien $(\exists x(p(x) \vee q(x)))$.

     Réciproquement,

     si $(\exists x(p(x) \vee q(x)))$, soit x_1 tel que $(p(x_1) \vee q(x_1))$ alors
     - soit $p(x_1)$ et donc $((\exists x\ p(x))$ et donc $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$
     - soit $q(x_1)$ et donc $((\exists x\ q(x))$ et donc $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$

     Dans les deux cas, on a bien $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$.

3. Pour I_3 on peut choisir comme domaine les entiers naturels, pour p(x) le prédicat "x est pair" et pour q(x) " x est impair". La formule $((\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x)))$ s'interprète alors comme tous les entiers sont pairs ou tous les entiers sont impairs, ce qui est faux

   La formule $(\forall x\ (p(x) \vee q(x)))$ s'interprète comme chaque entier est soit pair soit impair ce qui est vrai

   Φ_3 n'est donc pas valide pour l'interprétation I_3 Dans une interprétaion I' avec un domaine dans lequel il n'y a qu'un seul élément (et p et q deux prédicats quelconques), ou on peut choisir n'importe quel domaine et p=q. On aura alors $I' \models \Phi_3$

4. Ce n'est pas possible car Φ_4 est universellement valide. C'est à dire que pour toute interprétation I, on a $I \models \Phi_4$

5. Pour I, on peut choisir comme domaine les entiers naturels pour p la relation $<$

6. Cette formule n'est jamais valide si le domaine contient un unique élément a, car on devrait alors avoir $p(a, a) \wedge \neg(p(a, a)$, ce qui est impossible

---

3 Interprétation et Validité

Soit le langage :

- variable : x , y

- symboles fonctionnels : f (arité 2), a (arité 0)

- symboles de prédicat : p (arité 2)

Soit l'interprétation I :

- domaine : les entiers positifs

- f est la fonction somme, a la constante 0

- p est l'égalité

Caractériser la validité des propositions suivantes (cf cours 3.20) :

1. $\forall$ x p(f(x,y),x)
2. ($\forall$ x p(f(x,y),x)) $\Rightarrow$ ($\exists$ x p(f(x,y),x))
3. $\forall$ x $\exists$ y p(f(x,y),a)
4. $\forall$ x $\forall$ y p(f(x,y),f(y,x))

Sur le domaine des entiers naturels et dans l'interprétation donnée les formules peuvent se réécrire.

- Φ_1 : $\forall x\ x+y=x$. Cette formule est satisfiable : Pour toute valuation σ où $y \to 0$; $I \models_\sigma \Phi_1$. Mais elle n'est pas valide car $I \not\models_{\sigma_1} \Phi_1$ pour une valuation σ_1 qui affecte à y la valeur 1.
- Φ_2: $(\forall x\ x+y=x))) \Rightarrow (\exists x\ x+y=x))$. Non seulement $I \models \Phi_2$, mais Φ_2 est universellement valide, on dit aussi que c'est un théorème, ce que l'on note $\models \Phi_2$. En fait Φ_2 se réécrit en Φ :$\exists(\Psi$ $neg\Psi)$ avec $\Psi : x+y=x$ ce qui est une tautologie en logique classique.
- Φ_3: $\forall x \exists y\ x+y=0$ est faux pour les entiers naturels. On a $I \not\models \Phi_3$ [Remarque C'est une formule close]. En revanche l'interprétation I' ou l'on changerait simplement le domaine de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{Z}$ serait un modèle de Φ_3)
- Φ_4: $\forall x\ \forall y\ (x+y=y+x)$. I est un modèle pour Φ_4 , Φ_4 est valide dans I, $I \models \Phi_4$. Dans ce modèle, Φ_4 exprime la commutativité de l'addition dans $\mathbf{N}$. Mais Φ_4 n'est pas universellement valide : dans une interprétation où f n'est pas une fonction commutative Φ_4 est faux (par exemple, si on interprète f par la soustraction dans I.)
