TD Logique Feuille 3 MAM3 – SI3

Preuve dans tous les modèles
(Calcul propositionnel)

October 16, 2015

1 Preuve sémantique

Pour chacune des formules suivantes dire si elle est universellement valide, valide ou fausse :

1. Le pont des soupirs est en Australie et l'Australie est sous l'équateur. Donc le pont des soupirs est en Australie.
2. Le pont des soupirs est à Venise ou Venise est en France. Donc le pont des soupirs est à Venise.
3. L'Australie est sous l'équateur. Donc l'Australie n'est pas sous l'équateur.
4. Le pont des soupirs est à Venise ou n'est pas à Venise. Donc le pont des soupirs est à Venise, l'Australie est sous l'équateur et l'Australie n'est pas sous l'équateur.
5. Si le pont des soupirs est en France alors l'Australie est sous l'équateur. Donc si l'Australie n'est pas sous l'équateur, alors le pont des soupirs n'est pas en France.

2 Preuve syntaxique par 0-résolution

1. Un peu de chimie

   On suppose que l'on peut effectuer les réactions chimiques suivantes :

   - $MgO + H2 \rightarrow Mg + H_2O$
   - $C + O_2 \rightarrow C0_2$
   - $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

   On suppose que l'on dispose de MgO, H_2, O_2 et C. Montrer que l'on peut obtenir du H_2CO_3.

2. Les lasagnes

   Les lasagnes ne sont pas cuites ou sont trop salées. Si les lasagnes sont végétariennes ou qu'elles sont trop salées, les invités sont déçus. Les lasagnes ne sont pas végétariennes et elles sont cuites. Les invités seront-ils déçus ?

3. Implication

   Montrer que la formule Φ : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ est universellement valide.

3 Système formel de Hilbert pour le calcul propositionnel

Soit la théorie H définie par :

- Langage : $V = \emptyset$, $F = \emptyset$, P ne contient que des prédicats 0-aires, connecteurs logiques : $\{\Rightarrow, \neg\}$
- Axiomes
  - A1 : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  - A2 : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  - A3 :$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

et soit la règle de déduction $\vdash$ "modus ponens" définie par : $A, A \Rightarrow B \vdash B$ Le modus ponens associé à H forment la restriction au langage propositionnel du système formel de Hilbert; ce système formel est correct et complet pour la validité dans tous les modèles. Utiliser ce système pour montrer que la formule $\Phi : X \Rightarrow X$ est valide dans tous les modèles de H.

4 Inconsistance

Soit l'ensemble d'axiomes A :

- A1 : p
- A2 : $\neg s \Rightarrow q$
- A3 :$p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))$
- A4 :$p \Rightarrow ((s \vee r) \wedge \neg(s \wedge r))$
- A5: $q \Rightarrow \neg s$

1. A quel opérateur logique correspond $(q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r)$
2. En déduire par raisonnement logique que l'ensemble d'axiomes A est inconsistant
3. Montrer par 0-résolution que A est inconsistant