TD Logique Feuille 3   MAM3 – SI3

Preuve dans tous les modèles
(Calcul propositionnel)

November 30, 2016

1 Preuve sémantique

Pour chacune des formules suivantes dire si elle est universellement valide, valide ou fausse :

1. Le pont des soupirs est en Australie et l'Australie est sous l'équateur. Donc le pont des soupirs est en Australie.
2. Le pont des soupirs est à Venise ou Venise est en France. Donc le pont des soupirs est à Venise.
3. L'Australie est sous l'équateur. Donc l'Australie n'est pas sous l'équateur.
4. Le pont des soupirs est à Venise ou n'est pas à Venise. Donc le pont des soupirs est à Venise, l'Australie est sous l'équateur et l'Australie n'est pas sous l'équateur.
5. Si le pont des soupirs est en France alors l'Australie est sous l'équateur. Donc si l'Australie n'est pas sous l'équateur, alors le pont des soupirs n'est pas en France.

Commençons par réécrire ces formules dans la syntaxe de la logique propositionnelle.
En notant les propositions

- SA: "Le pont des soupirs est en Australie"
- AE: "L'australie est sous l'équateur"
- SV: "Le pont des soupirs est à Venise"
- VF: "Venise est en France"
- SF: "Le pont des soupirs est en France"

On peut répondre à la question (universellement valide, valide ou fausse ?) en remplissant la table de vérité pour chacune des formules.

1. Cette formule s'écrit $(SA \wedge AE) \Rightarrow SA$. C'est un théorème (= formule universellement valide), elle est universellement valide, en effet en utilisant :

   $(p \Rightarrow q)$ équivaut à $(\neg p \vee q)$

   $\neg(p \wedge q)$ équivaut à $(\neg p \vee \neg q)$

   on a la table suivante :

SA	AE	$(SA \wedge AE) \Rightarrow SA$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2. Cette formule s'écrit $(SV \vee VF) \Rightarrow SV$. Ce n'est pas un théorème, mais c'est une formule valide. En effet dans une interprétation où SV est vrai la formule est valide , en revanche elle est ne l'est pas dans l'interprétation où SV est faux mais VF est vraie.

   On a la table suivante :

SV	VF	$(SV \vee VF) \Rightarrow SV$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

3. Cette formule s'écrit $AE \Rightarrow \neg AE$. Cette formule est valide, elle est équivalente à $\neg AE$ qui est vraie si et seulement si AE et fausse (donc la formule est valide mais pas universellement valide).

4. Cette formule s'écrit $(SV \vee \neg SV) \Rightarrow (SV \wedge AE \wedge \neg AE)$. Elle est fausse car aucune interprétation ne peut la rendre vraie, puisque dans toutes les interprétations $(SV \vee \neg SV)$ est vraie et $(SV \wedge AE \wedge \neg AE)$ est faux.

5. Cette formule (qui dit qu'une implication implique sa contra-posée) s'écrit $((SF \Rightarrow AE) \Rightarrow (\neg AE \Rightarrow \neg SF)$. Elle est universellement valide d'après la définition de $p \Rightarrow q$.

---

2 Preuve syntaxique par 0-résolution

1. Un peu de chimie

   On suppose que l'on peut effectuer les réactions chimiques suivantes :

   - $MgO + H2 \rightarrow Mg + H_2O$
   - $C + O_2 \rightarrow C0_2$
   - $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

   On suppose que l'on dispose de MgO, H_2, O_2 et C. Montrer que l'on peut obtenir du H_2CO_3.

2. Les lasagnes

   Les lasagnes ne sont pas cuites ou sont trop salées. Si les lasagnes sont végétariennes ou qu'elles sont trop salées, les invités sont déçus. Les lasagnes ne sont pas végétariennes et elles sont cuites. Les invités seront-ils déçus ?

3. Implication

   Montrer que la formule Φ : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ est universellement valide.

---

1. Un peu de chimie

   Ici la théorie τ est composée des 7 axiomes

   - A1: $MgO \wedge H2 \Rightarrow Mg \wedge H_2O$
   - A2: $C \wedge O_2 \Rightarrow C0_2$
   - A3: $CO_2 \wedge H_2O \Rightarrow H_2CO_3$
   - A4: MgO
   - A5: H_2
   - A6: O_2
   - A7: C

   La méthode par 0-résolution, est une méthode de réfutation qui consiste

   (1) à ajouter aux axiomes de la théorie la négation de la conclusion, ici

   - A8 : $\neg H_2CO_3$

   (2) à réécrire le tout sous forme de clauses On réécrit donc les 3 premiers axiomes sous la forme

   - A1': $\neg MgO \vee \neg H2 \vee Mg$
   - A1": $\neg MgO \vee \neg H2 \vee H_2O$ // A1 donne 2 clauses
   - A2: $\neg C \vee \neg O_2 \vee C0_2$
   - A3: $\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3$

(3) à dériver la clause vide uniquement en utilisant la règle de réécriture :

si on la clause $(A \vee \Phi_1)$ *et la clause* $(\neg A \vee \Phi_2)$*, on obtient la clause* $\vdash (\Phi_1 \vee \Phi_2)$ *]*

qui se note : $((A \vee \Phi_1) \wedge (\neg A \vee \Phi_2)) \vdash (\Phi_1 \vee \Phi_2)$

Dont un cas particulier est : $(A \wedge (\neg A \vee \Phi) \vdash \Phi$ (qui est le *modus ponens* usuel : si l'on a A et $(A \Rightarrow \Phi)$ alors on a Φ).

$A8 \wedge A3 \vdash C1 : \neg CO_2 \vee \neg H_2O$

$C1 \wedge A1" \vdash C2 : \neg CO_2 \vee \neg MgO \vee \neg H2$

$C1 \wedge A1" \vdash C2 : \neg CO_2 \vee \neg MgO \vee \neg H2$

$C2 \wedge A2 \vdash C3 : \neg C \vee \neg O_2 \vee \neg MgO \vee \neg H2$

$C3 \wedge A7 \vdash C4 : \neg O_2 \vee \neg MgO \vee \neg H2$

$C4 \wedge A6 \vdash C5 : \neg MgO \vee \neg H2$

$C5 \wedge A4 \vdash C6 : \neg H2$

$C6 \wedge A5 \vdash \perp$(la clause vide).

2. Les lasagnes

   On commence par formaliser l'écriture en traduisant l'énoncé dans la syntaxe de la logique propositionnelle

   - LC : "Les lasagnes sont cuites"
   - LTS : "Les lasagnes sont trop salées"
   - LV : "Les lasagnes sont végétariennes"
   - ID : "Les invités sont déçus"

   La question devient alors : peut on déduire ID de la théorie

   - $\neg LC \vee LTS$
   - $(LV \vee LTS) \Rightarrow ID$
   - $\neg LV \wedge LC$

   Pour cela, nous allons réfuter l'ensemble de clauses

   - C1: $\neg LC \vee LTS$
   - C2: $\neg LV \vee ID$
   - C3: $\neg LTS \vee ID$
   - C4: $\neg LV$
   - C5: LC
   - C6: $\neg ID$

   Les 5 premières clauses sont équivalentes aux axiomes de la théorie, et la dernière est la négation de ce que l'on veut prouver.

   - $C6 \wedge C3 \vdash C7 : \neg LTS$
   - $C7 \wedge C1 \vdash C8 : \neg LC$
   - $C8 \wedge C5 \vdash C9 : \perp$

3. Pour cela, on va réfuter la négation de Φ On commence par transformer $\neg(\Phi)$: $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ en un ensemble de clauses équivalentes.

   Par définition de l'implication, $\neg\Phi$ est équivalent à

   $\neg((\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))) \vee ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$ et à

   $\neg((A \wedge \neg(B \Rightarrow C)) \vee (\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)))$ et à

   $\neg((A \wedge (B \wedge \neg C)) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C)))$ et donc au système de clauses :

   - C1: $\neg A \vee \neg B \vee C$
   - C2: $\neg A \vee B$
   - C3: A
   - C4:$\neg C$

   On a alors

- $C1 \wedge C4 \vdash C5 : \neg A \vee \neg B$
- $C5 \wedge C3 \vdash C6 : \neg B$
- $C6 \wedge C2 \vdash C7 : \neg A$
- $C7 \wedge C3 \vdash \perp$

---

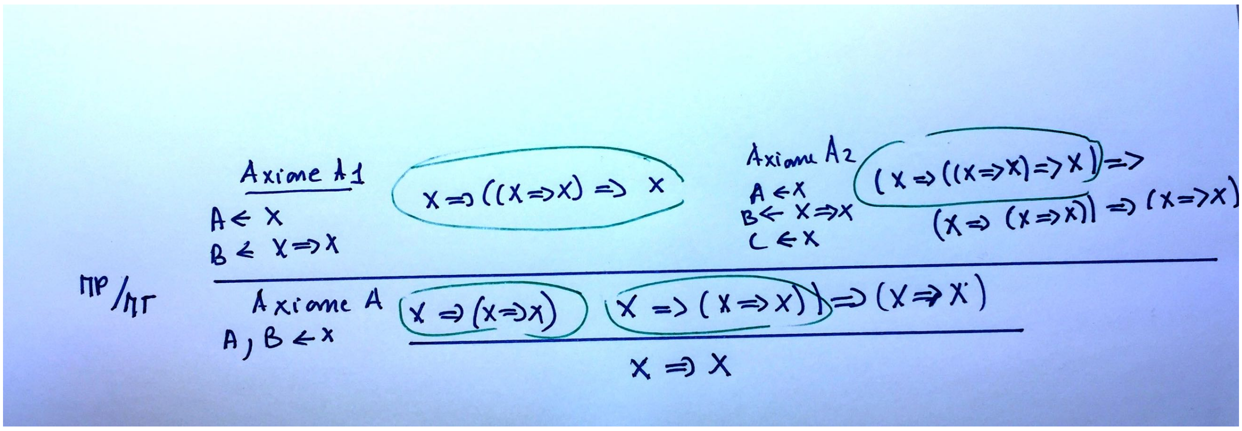
3 Système formel de Hilbert pour le calcul propositionnel

Soit la théorie H définie par :

- Langage : $V = \emptyset$, $F = \emptyset$, P ne contient que des prédicats 0-aires, connecteurs logiques : $\{\Rightarrow, \neg\}$
- Axiomes
  - A1 : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  - A2 : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  - A3 :$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

et soit la règle de déduction $\vdash$ "modus ponens" définie par : $A, A \Rightarrow B \vdash B$ Le modus ponens associé à H forment la restriction au langage propositionnel du système formel de Hilbert; ce système formel est correct et complet pour la validité dans tous les modèles. Utiliser ce système pour montrer que la formule Φ : $X \Rightarrow X$ est valide dans tous les modèles de H.

On peut raisonner à la fois en *em modus ponens* et en *modus tollens*.



---

4 Inconsistance

Soit l'ensemble d'axiomes A :

- A1 : p
- A2 : $\neg s \Rightarrow q$
- A3 :$p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))$
- A4 :$p \Rightarrow ((s \vee r) \wedge \neg(s \wedge r))$
- A5: $q \Rightarrow \neg s$

1. A quel opérateur logique correspond $(q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r)$

2. En déduire par raisonnement logique que l'ensemble d'axiomes A est inconsistant
3. Montrer par 0-résolution que A est inconsistant

---

1. il s'agit du ou exclusif $\oplus$
2. De A1 et A3 on déduit $q \oplus r$, de A1 et A4 on déduit $s \oplus r$. De A2 et A5 on déduit que $q \oplus s$. Mais ces 3 $\oplus$ sont incompatibles [Si q est vrai r doit etre faux, donc s doit etre vrai mais alors $q \oplus r$ est faux. Si q est faux, r doit être vrai, donc s doit être faux donc $q \oplus r$ est faux]. L'ensemble d'axiomes est donc inconsistant
3. A nouveau on remplace A par un système de clauses équivalent et on en déduit la clause vide.
   - C1 :p
   - C2: $s \vee q$
   - C3 : $\neg p \vee q \vee r$
   - C3': $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
   - C4: $\neg p \vee r \vee s$
   - C4': $\neg p \vee \neg r \vee \neg s$
   - C5 : $\neg q \vee \neg s$

   Puis par exemple on utile les résolutions successives :
   - $C1 \wedge C3 \vdash C6$: $q \vee r$
   - $C6 \wedge C5 \vdash C7$: $r \vee \neg s$
   - $C7 \wedge C4' \vdash C8$: $\neg p \vee \neg s$
   - $C8 \wedge C1 \vdash C9$: $\neg s$
   - $C9 \wedge C2 \vdash C10$: q
   - $C4 \wedge C9 \vdash C11$: $\neg p \vee s$
   - $C11 \wedge C1 \vdash C12$: s
   - $C11 \wedge C9 \vdash C12$:$\perp$
