TD Logique Feuille 4 – MAM3 / SI3

Preuve dans tous les modèles — Calcul des prédicats

1 Forme prenexe, forme de Skolem

Mettre sous forme prenexe puis de skolem les formules :

1. $\forall x(\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x)\ )$
2. $\forall x \forall y(\ (\exists z\ p(x,z) \wedge p(y,z)) \Rightarrow \exists u\ q(x,y,u)\ )$
3. $\exists x(\ p(x,a) \Rightarrow \neg(\forall y\ q(x,y) \vee r(x))\ )$

Mise sous forme prenexe

1. $\forall x(\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x)\ )$
   - $\forall x(\ p(x) \Rightarrow \exists y\ q(y)\ )$ [renommage des variables quantifiées plusieurs fois]
   - $\forall x(\ \neg p(x) \vee \exists y\ q(y)\ )$ [élimination de l'implication]
   - $\forall x \exists y(\ \neg p(x) \vee\ q(y)\ )$ [remontée d'un quantificateur]
2. $\forall x \forall y(\ (\exists z\ p(x,z) \wedge p(y,z)) \Rightarrow \exists u\ q(x,y,u)\ )$
   - $\forall x \forall y(\ (\forall z\ \neg p(x,z) \vee \neg p(y,z)) \vee \exists u\ q(x,y,u)\ )$ [élimination de l'implication]
   - $\forall x \forall y \forall z \exists u(\ \neg p(x,z) \vee \neg p(y,z) \vee\ q(x,y,u)\ )$ [remontée des quantificateurs]
3. $\exists x(\ p(x,a) \Rightarrow \neg(\forall y\ q(x,y) \vee r(x))\ )$
   - $\exists x(\ \neg p(x,a) \vee \neg(\forall y\ q(x,y) \vee r(x))\ )$ [élimination de l'implication]
   - $\exists x(\ \neg p(x,a) \vee (\exists y\ \neg(q(x,y) \vee r(x))\ )$ [négation de $\forall$ transformée en $\exists$]
   - $\exists x \exists y(\ \neg p(x,a) \vee\ \neg q(x,y) \wedge\ \neg r(x)\ )$ [remontée d'un quantificateur]

Skolèmisation (i.e. remplacement des $\exists$ par des dépendances indiquées ici par des indices)

1. $\forall x(\ \neg p(x) \vee\ q(y_x)\ )$
2. $\forall x \forall y \forall z(\ \neg p(x,z) \vee \neg p(y,z) \vee\ q(x,y,u_{xyz})\ )$
3. $\neg p(x_0,a) \vee\ \neg q(x_0,y_0) \wedge\ \neg r(x_0)$

---

2 Unification

Calculer (lorsque c'est possible) un plus grand unificateur pour les formules suivantes

1	$A = p(f(g(a, y)), z, y)$	$B = p(f(z), x, f(b))$
2	$A = p(f(g(x, y)), g(v, w), y)$	$B = p(f(z), x, f(x))$
3	$A = p(f(x), f(y), f(z))$	$B = p(g(x), g(y), g(z))$
4	$A = p(x, f(x), g(f(x), x))$	$B = p(z, f(f(g(a, z)), v))$
5	$A = p(f(x), x)$	$B = p(y, f(y))$
6	$A = p(f(f(b, x1, x1), x2, x2), x3, x3)$	$B = p(x4, x4, f(x5, x5, b)))$

---

1. Un plus grand unificateur des deux formules est: $[y \mid f(b); x \mid g(a, b); z \mid g(a, b)]$
2. Un plus grand unificateur des deux formules est: $[y \mid f(g(v, w));\ x \mid g(v, w);\ z \mid g(x, y)]$
3. Unification impossible (on ne peut pas unifier f(x) et g(x))
4. Unification impossible de z et $f(g(a, z))$
5. Unification impossible de x et $f(f(x))$
6. Unification impossible

---

3 Les marchands

Aucun marchand de voitures d'occasion n'achète de voiture d'occasion. Certaines personnes qui achètent des voitures d'occasion sont complètement malhonnêtes. Conclure que certaines personnes complètement malhonnêtes ne sont pas des marchands de voitures d'occasion.

En notant

- MVA(x) : x est marchand de voiture d'occassion
- M(y) : y et une personne complètement malhonnête
- AVA(x) : la personne x achète une voiture d'occasion

L' énoncé devient :

$\mathrm{A}_1 :\ \forall x\ (\mathrm{MVA}(x) \Rightarrow \neg\mathrm{AVA}(x))$

$\mathrm{A}_2 :\ \exists x(\mathrm{AVA}(x) \wedge M(x))$

On veut déduire: $\Phi :\ \exists x(M(x) \wedge \neg\mathrm{MVA}(x))$

La mise sous forme prenexe , de Skolem, et de clauses de $\{A_1,\ A_2,\ \neg\Phi\}$ donne:

- $c_1 : \neg\mathrm{MVA}(x) \vee \neg\mathrm{AVA}(x))$
- $c_2 : \mathrm{AVA}(x_0)$
- $c_3 : M(x_0)$

- $\neg\Phi : \neg M(x) \vee \text{MVA}(x)$

Résolution:

$$\frac{c_1 : \neg\text{MVA}(x) \vee \neg\text{AVA}(x)) \qquad c_2 : \text{AVA}(x_0)}{c_5 : \neg\text{MVA}(x_0)}$$

(Pas de renommage à faire, le plus grand unificateur entre AVA(x) et AVA(x_0) est $(x|x_0)$)

$$\frac{\neg\Phi : \neg\text{M}(x) \vee \text{MVA}(x) \qquad c_5 : \neg\text{MVA}(x_0)}{c_6 : \ \neg\text{M}(x_0)}$$

(Pas de renommage à faire, le plus grand unificateur entre MVA(x) et MAVA(x_0) est $(x|x_0)$)

$$\frac{c_6 : \neg\text{M}(x_0) \qquad c_3 : \text{M}(x_0)}{\square}$$

Le résultat est prouvé.

---

4 Prouver que nous vivons dans un monde dangereux !

A partir des énoncés suivants :

- Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis
- Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes
- Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes
- Il y a des crimes

montrer qu'il y a des gens malhonnêtes non arrêtés

En notant

- C(x) : x est un crime
- M(y) : y et une personne malhonnête
- CC(x,y) : la personne y a commis le crime x
- A(y) : y est une personne malhonnête arrêtée

L' énoncé devient

- $A_1 : \ \forall x \ (C(x) \Rightarrow \exists y \ \text{C}(x,y))$
- $A_2 : \ \forall x \forall y \ (\text{CC}(x,y) \Rightarrow \text{M}(y))$
- $A_3 : \ \forall y \forall x (\text{M}(y) \ \wedge \ A(y) \Rightarrow \neg\text{CC}(x,y))$

- $A_4 : \exists x C(x)$

Et on veut en déduire $\Phi : \exists y\ \mathrm{M}(y) \wedge \neg A(y)$.

La mise sous forme prenexe , de Skolem, et de clauses de $\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \neg\Phi\}$ donne:

- $c_1 : \neg \mathrm{C}(x) \vee \mathrm{CC}(x, f(x))$
- $c_2 : \neg \mathrm{CC}(x, y) \vee \mathrm{M}(y)$
- $c_3 : \neg \mathrm{M}(y) \vee \neg \mathrm{A}(y) \vee \neg \mathrm{CC}(x, y)$
- $c_4 : \mathrm{C}(x_0)$
- $\neg\Phi : \neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{A}(x)$

Résolution:

$$\frac{c_1 : \neg \mathrm{C}(x) \vee \mathrm{CC}(x, f(x)) \qquad c_4 : \mathrm{C}(x_0)}{c_6 : \mathrm{CC}(x_0, f(x_0)}$$

(pas de variable commune, donc pas de renommage, le plus grand unificateur entre $\mathrm{C}(x)$ et $\mathrm{C}(x_0)$ est $(x|x_0)$)

$$\frac{c_2 : \neg \mathrm{CC}(x, y) \vee \mathrm{M}(y) \qquad c_6 : \mathrm{CC}(x_0, f(x_0))}{c_7 : \mathrm{M}(f(x_0))}$$

(pas de variable commune, donc pas de renommage, le plus grand unificateur entre $\mathrm{CC}(x_0, f(x_0))$ et $\mathrm{CC}((x, y)$ est $(x|x_0)(y|f(x_0))$)

$$\frac{c_3 : \neg \mathrm{M}(y) \vee \neg \mathrm{A}(y) \vee \neg \mathrm{CC}(x, y) \qquad c_6 : \mathrm{CC}(x_0, f(x_0))}{c_8 : \neg \mathrm{A}(f(x_0)) \vee \neg \mathrm{M}(f(x_0))}$$

(pas de variable commune, donc pas de renommage, le plus grand unificateur entre $\mathrm{CC}(x_0, f(x_0)$ et $\mathrm{CC}((x, y)$ est $(x|x_0)(y|f(x_0))$)

$$\frac{\neg\Phi : \neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{A}(x) \qquad c_8 : \neg \mathrm{A}(f(x_0)) \vee \neg \mathrm{M}(f(x_0))}{c_9 : \neg \mathrm{M}(f(x_0))}$$

(pas de variable commune, donc pas de renommage, le plus grand unificateur entre $\mathrm{A}(f(x_0))$ et $\mathrm{A}(x)$ est $(x|f(x_0))$)

$$\frac{c_7 : \mathrm{M}(f(x_0)) \qquad c_9 : \neg \mathrm{M}(f(x_0))}{\square}$$

---

5 Football

Le célèbre professeur Manolo m'a dit: "il existe un humain tel que si cet humain aime le football, alors tout les humains aiment le football"

- qu'en pensez-vous?
- formuler cette phrase dans le langage du premier ordre et confirmer ou infirmer sa validité. Donnez-en une formulation en français non ambigüe.

- Soit tout le monde aime le football et quelque soit l'humain qu'on choisit la phrase est vraie, soit il existe un humain qui n'aime pas le football et c'est lui qu'on choisit
- $\exists y(F(y) \Rightarrow \forall x F(x))$
  qui est equivalent à
  $\exists y(\neg F(y) \vee \forall x F(x))$
  et à
  $(\exists y \neg F(y)) \vee (\forall x F(x))$
  qui est vrai et qui peut s'exprimer en français par "il existe un humain qui n'aime pas le football ou tout le monde aime le football", formulation nettement plus claire que celle de l'énoncé.

---

6 Diminution

Soit l'ensemble de clauses $S = \{p(x) \vee p(y), \neg p(x) \vee \neg p(y)\}$

- Expliquer pourquoi la règle d'inférence de la résolution ne permet pas de dériver la clause vide.
- Montrer que l'utilisation de la règle d'inférence de diminution permet de détecter l'inconsistance de S.

- La règle de résolution permet seulement de dériver les clause $p(x) \vee \neg p(x)$ et $p(y) \vee \neg p(y)$ qui sont des tautologies ....
- La règle d'inférence de diminution permet à partir de dériver $p(x)$ à partir de $p(x) \vee p(y)$ et $\neg p(x)$ à partir de $\neg p(x) \vee \neg p(y)$. Maintenant on peut dériver la clause vide à partir de ces deux nouvelles clauses

---