

## Cryptographie à clé publique

Bruno MARTIN,  
Université Côte d'Azur

## Cryptographie à clé publique

1976 : Invention de Diffie et Hellman [2] ; 1<sup>re</sup> phrase prophétique :

*We stand today on the brink of a revolution in cryptography.*

**Idée géniale** : asymétrique ; chiffrement  $\neq$  du déchiffrement.

- chiffrement par clé **publique** ( $pk$ )
- déchiffrement avec clé **privée** ( $sk$ )

Utile pour distribuer les clés : publiées dans un annuaire

Le principe de Kerckhoff (1883) est d'autant plus d'actualité

*La sécurité d'un chiffre ne doit pas dépendre du secret de l'algorithme mais seulement du secret de la clé.*

## Fonction à sens unique

Soit  $M$  et  $C$  deux ensembles et  $f : M \rightarrow C$ .  $f(M)$  : image de l'ensemble  $M$  par  $f$ .  $f$  est à **sens unique** (OW) si

- pour tout  $x$  de  $M$ , il est facile de calculer  $f(x)$  ( $f$  calculable en temps polynomial) et
- il est difficile de trouver, pour la plupart des  $y \in f(M)$  un  $x \in M$  tel que  $f(x) = y$  (problème « difficile » [3, 4, 1]).

Mais, s'il est difficile de trouver, pour la plupart des  $y \in f(M)$  un  $x \in M$  tel que  $f(x) = y$ , déchiffrer aussi difficile que cryptanalyser !  
Autre notion nécessaire pour permettre le déchiffrement et rendre la cryptanalyse aussi difficile que possible.

→ Notion de trappe.

## Fonction à sens unique à trappe

$f : M \rightarrow C$  à sens unique est à **trappe** si le calcul dans le sens inverse est efficace en connaissant la trappe (secrète).

La trappe permet de construire une fonction  $g$  telle que  $g \circ f = Id$ .  
Calcul dans le sens direct est facile et dans le sens inverse, calculatoirement impossible sans connaître  $g$ .

- construire des couples  $(f, g)$  doit être facile
- publier  $f$  ne doit rien révéler sur  $g$

C'est là qu'on retrouve formalisée l'idée d'utiliser deux algorithmes différents, un pour chiffrer  $f$  et un pour déchiffrer  $g$ .

## Définition PKC

## Définition

Un chiffre à clé publique est un triplet PPT  $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$  :

- $Gen : 1^n \rightarrow (pk, sk)$  resp. clé publique et privée tq  $|pk| \approx |sk| \approx n$ .
- $Enc : c \leftarrow Enc_{pk}(m)$  où  $m \in M(pk)$
- $Dec : m := Dec_{sk}(c)$  (déterministe)

On demande que  $Dec_{sk}(Enc_{pk}(m)) = m$  pour tous les  $m \in M$  et toutes les clés  $(pk, sk)$  produites par  $Gen$ .

## Formalisation OW

## Définition (OW)

$f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  est à sens unique si :

- il existe un algo en temps polynomial pour calculer  $f(x)$
- pour tout adversaire  $A$  PPT, il existe  $negl. tq$  :

$$Pr[Invert_{A, f}(n)] \leq negl(n)$$

$Invert_{A, f}(n)$  formalise l'attaque contre OW  $f$  :

- 1  $m \xleftarrow{u} \{0, 1\}^n$ ;  $c := f(m)$
- 2  $A$  reçoit  $1^n$  et  $c$  et renvoie  $m'$
- 3  $A$  réussit (i.e. renvoie 1) ssi  $f(m') = c$

## Sécurité calculatoire

Cryptanalyste déploie plus d'efforts de calcul que la durée de vie du clair.

Défis pour casser des clés jusqu'à 2009 et la factorisation de RSA-768 un nombre à 232 chiffres).

(cf. [https://en.wikipedia.org/wiki/RSA\\_Factoring\\_Challenge](https://en.wikipedia.org/wiki/RSA_Factoring_Challenge)).

[//en.wikipedia.org/wiki/RSA\\_Factoring\\_Challenge](https://en.wikipedia.org/wiki/RSA_Factoring_Challenge).

## Sécurité calculatoire : exemple factorisation

- Donné  $n = pq$
- trouver  $p$  (et  $q$ ).

Année	$\log_2(\#Op.)$	$\log_2(n)$	1 MIPS	500 MIPS
< 2000	64	768	$2^{19}$	$2^{10}$
< 2010	80	1024	$2^{35}$	$2^{26}$
< 2020	112	2048	$2^{67}$	$2^{58}$
< 2030	128	3072	$2^{83}$	$2^{74}$

NB :  $2^{80}$  opérations correspond à  $2^{35}$  ans (1 MIPS). Pour info, un i7 développe au max 318 MIPS et certains i9 4000 MIPS.

## Sécurité prouvée : preuves par réduction

- Hypothèse : le problème algorithmique  $\Pi$  est difficile (pas algo poly. sauf...) avec  $\Pi = \text{RSA}, \text{DLP}, \text{DDH}, \text{CDH}, \dots$
- Réduction :
  - si un adversaire  $A$  PPT casse le chiffre
  - alors on peut utiliser  $A$  pour résoudre  $\Pi$  en temps poly.
- résultat de sécurité : il n'existe pas d'adversaire poly.

Expérience IND-CPA :  $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}$ 

- 1  $\text{Gen}(1^n)$  produit  $(pk, sk)$
- 2 l'adversaire  $A$  reçoit  $pk$  et un accès à (l'oracle)  $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$ .  $A$  retourne  $m_0, m_1 \in M(pk)$  de même long.
- 3  $b \leftarrow \{0, 1\}$ ; calculer  $c \leftarrow \text{Enc}_{pk}(m_b)$  et envoyer  $c$  à  $A$  : le défi chiffré
- 4  $A$  a toujours accès à  $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$ . et retourne un bit  $b'$
- 5  $A$  réussit l'expérience (i.e. renvoie 1) ssi  $b = b'$

Expérience IND-EAV :  $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{EAV}}$ 

- 1  $\text{Gen}(1^n)$  produit  $(pk, sk)$
  - 2 l'adversaire  $A$  reçoit  $pk$  et un accès à (l'oracle)  $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$ .  $A$  retourne  $m_0, m_1 \in M(pk)$  de même long.
  - 3  $b \leftarrow \{0, 1\}$ ; calculer  $c \leftarrow \text{Enc}_{pk}(m_b)$  et envoyer  $c$  à  $A$  : le défi chiffré
  - 4  $A$  a toujours accès à  $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$ . et retourne un bit  $b'$
  - 5  $A$  réussit l'expérience (i.e. renvoie 1) ssi  $b = b'$
- qui est équivalente à  $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}$

## Définition de la sécurité

## Définition

$\Pi$  est IND-CPA si, pour tout adversaire  $A$  PPT, il existe  $\text{negl}(\cdot)$  tq :

$$\Pr(\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}(n) = 1) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

L'oracle de chiffrement n'est pas nécessaire, donc si  $\Pi$  IND-EAV, alors  $\Pi$  IND-CPA.

## Le premier chiffre à clé publique

Inventé en 1978 par Rivest Shamir et Adleman.  
Ils cherchaient une contradiction au concept de clé publique.  
Après beaucoup d'efforts, ils sont finalement parvenus au résultat inverse et ont été récompensés du Turing Award en 2002!  
[http://www.acm.org/awards/turing\\_citations/rivest-shamir-adleman.html](http://www.acm.org/awards/turing_citations/rivest-shamir-adleman.html)

## RSA

## Le chiffre de Rivest Shamir et Adleman (1978)

Repose sur la difficulté calculatoire de factoriser un nombre **et** sur la difficulté calculatoire de dire si un nombre est premier.  
Par exemple, 1829 est-il premier ?

Non : on vous donne 31 et 59, on vérifie en les multipliant que 1829 est leur produit, mais les trouver est beaucoup plus difficile. Surtout qu'on ne connaît pas a priori le nombre de facteurs premiers de 1829.

Ou bien, 7919 est-il composé ?

Non, mais le certificat de primalité est plus « difficile » à exhiber.

## Rappels mathématiques

**Indicatrice d'Euler** d'un entier  $n$  notée  $\varphi(n)$  : nombre d'entiers compris entre 1 et  $n$  premiers avec  $n$ . On a  $\varphi(1) = 1$  et pour  $p$  premier,  $\varphi(p) = p - 1$ .

$$\varphi(n) = \text{card}\{j \in \{1, \dots, n\} : \text{gcd}(j, n) = 1\}$$

**Calcul** : décomposer  $n = \prod_{p|n, p \text{ premier}} p^{\alpha_p}$  alors,  
 $\varphi(n) = \prod_{p|n, p \text{ premier}} (p^{\alpha_p} - p^{\alpha_p - 1}) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$ .

**Exemple**

$$\varphi(12) = (4 - 2)(3 - 1) = 12(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 4$$

## Petit théorème de Fermat - Euler

On utilise le théorème d'Euler :

### Théorème (Fermat-Euler)

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \text{ si } \gcd(m, n) = 1$$

qui généralise le petit théorème de Fermat :  
Pour  $p$  premier, tout entier  $m$  vérifie :

$$m^p \equiv m \pmod{p}$$

et si  $p \nmid m$ ,

$$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

## Théorème Chinois des restes

### Théorème

Soit  $n_1, \dots, n_k$  et  $x_1, \dots, x_k$  entiers tq pour toute paire  $(i, j)$ , on a

$$x_i \equiv x_j \pmod{\gcd(n_i, n_j)}$$

Il existe  $x \in \mathbb{N}$  tq  $x \equiv x_i \pmod{n_i}$  pour  $1 \leq i \leq k$ . De plus,  $x$  est unique modulo le ppcm de  $n_1, \dots, n_k$ .

### Corollaire

Soit  $n_1, \dots, n_k$  premiers 2 à 2. Alors, pour tout entier  $x_i$ , il existe un unique entier  $x$  modulo  $\prod n_i$  tq

$$x \equiv x_i \pmod{n_i} \quad 1 \leq i \leq k$$

## Algorithme de calcul

Input :  $x_i, n_i \quad 1 \leq i \leq n$

$$n = \prod_{i=1}^k n_i$$

for  $i = 1$  à  $k$  do

calculer  $n/n_i$

$$\gcd(n/n_i, n_i) =$$

$$= s_i \frac{n}{n_i} + t_i n_i = 1$$

$$c_i = x_i s_i \pmod{n_i}$$

end for

Output :  $\sum_{i=1}^k c_i \frac{n}{n_i}$

$i$	1	2	3	
$x_i$	2	3	2	
$n_i$	3	5	7	$n = 105$
$\frac{n}{n_i}$	35	21	15	
$\gcd$	-1.35	1.21	1.15	
	12.3	-4.5	-2.27	
$s_i x_i$	-2	3	2	
$\text{mod}$	-2	3	2	
$c_i \frac{n}{n_i}$	-70	63	30	$x = 23$

Qiu JiuShao : combien l'armée de Han Xing a-t-elle de soldats si, rangés en 3 colonnes, il en reste 2, par 5 colonnes, il en reste 3 et par 7 colonnes, il en reste 2 ?

## Les carrés modulaires

On veut décider le problème :

### Problème

INSTANCE :  $p > 2$  premier et  $a$  un entier

QUESTION : Existe-t-il  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  t.q.  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  ?

Si  $a$  est un carré ( $b^2 \equiv a \pmod{p}$ ),  $a$  possède 2 racines carrées  $\pm b$ .  
Trouver les carrés = calcul de  $x^2 \pmod{p}$  pour  $1 \leq x \leq (p-1)/2$  ;  
les autres entiers de  $[(p-1)/2 + 1, (p-1)]$  sont leurs opposés.  
Les carrés de  $\mathbb{Z}_p^*$  sont appelés **résidus quadratiques** modulo  $p$ .

## Symbole de Legendre

On le note  $\left(\frac{a}{p}\right)$  pour  $p$  premier :  $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p|a \\ +1 & \text{si } a \text{ est un carré} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

## Théorème

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

**Preuve :** si  $p \mid a$ , les deux membres de la congruence sont nuls.

On suppose que  $p \nmid a$ . Par Fermat, dans  $\mathbb{Z}_p$ ,  $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 = 1$  donc

$a^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$ . Si  $g$  est un générateur de  $\mathbb{Z}_p^*$  tel que  $a = g^j$ . Alors,  $a$  est un résidu quadratique ssi  $j$  est pair. Et donc  $a^{\frac{p-1}{2}} = g^{j\frac{p-1}{2}}$  vaut 1 ssi  $j(p-1)/2$  est divisible par  $p-1$ . Ainsi le membre droit et le membre gauche de la congruence valent  $\pm 1$  dans  $\mathbb{Z}_p$  et chacun vaut  $+1$  ssi  $j$  est pair.  $\square$

## Propriétés

Le symbole de Legendre satisfait les propriétés suivantes :

- 1  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$
- 2  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$  autrement dit,  $-1$  est un carré modulo  $p$  si  $p \equiv 1 \pmod{4}$  et n'est pas un carré modulo  $p$  si  $p \equiv 3 \pmod{4}$
- 3  $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$  autrement dit,  $2$  est un carré modulo  $p$  si  $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$  et n'est pas un carré modulo  $p$  si  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .
- 4  $\left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$  si  $b$  et  $p$  sont premiers entre eux
- 5 **loi de réciprocité quadratique :**

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{p}{q}\right) & \text{si } p \text{ et } q \equiv 3 \pmod{4} \\ \left(\frac{p}{q}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Calcul du symbole de Legendre  $\left(\frac{a}{p}\right)$ 

si  $a$  est pair (et réduit modulo  $p$ ),  $a = 2^\alpha a'$  avec  $a'$  impair et on utilise la multiplicativité du symbole de Legendre :  $\left(\frac{2}{p}\right)^\alpha \left(\frac{a'}{p}\right)$ .

Deux cas :

- $a'$  non premier et  $a' = \prod_{i=1}^k q_i^{\alpha_i}$ . Alors  $\left(\frac{a'}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{q_k}{p}\right)^{\alpha_k}$
- $a'$  premier et on applique la loi de réciprocité quadratique

## Exemple

7411 est-il un carré modulo 9283 ? Calculons  $\left(\frac{7411}{9283}\right)$ .

Les 2 entiers sont premiers et congrus à 3 modulo 4. Loi de réciprocité :  $\left(\frac{7411}{9283}\right) = -\left(\frac{9283}{7411}\right) = -\left(\frac{1872}{7411}\right)$ .  $1872 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$ , et  $-\left(\frac{1872}{7411}\right) = -\left(\frac{13}{7411}\right)$ .

Par une nouvelle application de la loi de réciprocité,  $-\left(\frac{7411}{13}\right) = -\left(\frac{1}{13}\right) = -1$  et donc 7411 n'est pas un carré modulo 9283.

Inconvénient : calcul de Legendre est difficile ; il faut factoriser le « numérateur ».

## Symbole de Jacobi

Le symbole de Jacobi étend celui de Legendre comme suit :

## Definition

Etant donnés  $m$  et  $n$  premiers entre eux,  $m$  impair,

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{n}{p_k}\right)^{\alpha_k}$$

pour  $m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$  et  $\left(\frac{n}{p_i}\right)$  le symbole de Legendre.

Il vérifie la plupart des propriétés du symbole de Legendre sauf :

- $\left(\frac{m}{n}\right) \not\equiv m^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}$  en général ;
- $\left(\frac{m}{n}\right) = 1 \not\Rightarrow m$  est un carré modulo  $n$ .  
Par exemple,  $\left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)(-1) = 1$   
mais  $\nexists x \in \mathbb{N}$  t.q.  $x^2 \equiv 2 \pmod{15}$ .

## Calcul du symbole de Jacobi

Soit à calculer  $\left(\frac{n}{m}\right)$   $m$  et  $n$  premiers entre eux,  $m$  impair

- si  $n > m$ ,  $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n \bmod m}{m}\right)$  ;
- si  $n$  est pair,  $n = 2^\alpha n'$  et  $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^\alpha \left(\frac{n'}{m}\right)$
- si  $n$  est impair et  $n < m$ ,  $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}}$

Petites valeurs de particulières :

$$\left(\frac{1}{n}\right) = +1 \quad \left(\frac{4}{n}\right) = +1$$

## Exemple

$$\left(\frac{26}{43}\right) = \left(\frac{2}{43}\right) \left(\frac{13}{43}\right) = -\left(\frac{13}{43}\right) = -\left(\frac{43}{13}\right) = -\left(\frac{4}{13}\right) = -1$$

## Factorisation et primalité : Crible d'Eratosthène

## Problème

INSTANCE : *Un entier  $n$*

QUESTION :  *$n$  est-il premier ?*

Problème algorithmique par excellence. Très étudié.

Nombreux critères permettent de vérifier si un entier  $n$  est premier.

On divise  $n$  par tous les entiers impairs compris entre 3 et  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

Méthode connue depuis l'antiquité et efficace pour  $n < 10^{12}$ .

Crible d'Eratosthène en  $O(\sqrt{n})$ . Pas polynomial ! Complexité en

temps n'est pas polynôme en la longueur de l'entrée, en  $\log(n)$ .

Il est **pseudo polynomial**.

## Test de Lucas

## Définition

Soit  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tq  $\gcd(a, n) = 1$ , l'ordre multiplicatif de  $a$  mod  $n$  est le plus petit entier  $k$  tq  $a^k \equiv 1 \pmod{n}$  (ou  $a^k - 1 | n$ ).

## Théorème

$n$  est premier ssi  $\exists g \in \mathbb{Z}_n^*$  tel que  $g^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  et  $g^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$  pour tout  $p$  facteur premier de  $n-1$ .

**Preuve [5]** pour  $n$  premier,  $g$  primitif modulo  $n$  remplit la condition. Réciproquement, si un tel  $g$  existe, alors l'ordre de  $g$  dans  $\mathbb{Z}_n^*$  est forcément  $n-1$ . Or, tout élément de  $\mathbb{Z}_n^*$  est d'ordre un diviseur de  $\varphi(n)$  ; comme  $\varphi(n) \leq n-1$ , on a  $\varphi(n) = n-1$ , équivalent à  $n$  premier.  $\square$

On en déduit le test de primalité de Lucas. Il permet de construire un algorithme non-déterministe en temps polynomial. Primalité  $\in$  NP .

## Et le complémentaire de Primalité ?

La reconnaissance des nombres composés est dans NP ; construire p.e. un algorithme de type deviner/vérifier pour leur factorisation. Plus précisément, on considère le problème FACTM des facteurs majorés.

## Problème

INSTANCE : *Un entier  $n$  et un nombre  $M \leq n$ .*

QUESTION : *Existe-t-il un diviseur de  $n$  inférieure à  $M$  ?*

La difficulté de factoriser équivaut à la difficulté de résoudre FACTM. En effet, si  $\text{FACTM} \in \text{P}$ ,  $n$  se factorise en temps poly. par dichotomie : on cherche s'il y a un facteur de  $n$  dans l'intervalle  $[1, \sqrt{n}]$  en résolvant FACTM avec  $M = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  ; s'il n'y en a pas,  $n$  est premier. S'il y en a, on cherche si  $n$  a un facteur dans  $[1, \sqrt{n}/2]$ , sinon on cherche s'il a un facteur dans l'intervalle  $[\sqrt{n}/2, \sqrt{n}]$  etc. En conséquence,

## Théorème (Pratt)

PRIMALITÉ  $\in$  NP  $\cap$  co-NP .

Primes  $\in P$ , Agrawal, Kayal et Saxena (2002)

A partir de l'identité :

$$\text{si } \gcd(a, p) = 1, \quad [(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{p} \Leftrightarrow p \text{ premier}]$$

AKS ont construit un **algo. dét. de test de primalité**.

Donné  $p$  premier, choisir  $P(x) = x - a$  et vérifier l'équation.

Coûteux en temps dans le pire des cas!

Amélioration : évaluer la congruence modulo  $x^r - 1$  pour un premier  $r$  bien choisi (dans l'anneau  $\mathbb{F}_p[x]/(x^r - 1)$ ). Une itération de l'algorithme sera :

$$(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{(x^r - 1, p)}$$

Et de vérifier cette nouvelle congruence pour un petit nombre de valeurs de  $a$  (de l'ordre de  $O(\sqrt{r} \log p)$ ).

**Entrée** : un entier  $n > 1$

**Si**  $n$  est de la forme  $a^b$ ,  $b > 1$  **alors**  $n$  est COMPOSE **fsi**  
 $r \leftarrow 2$

**Tantque**  $r < n$  **faire**

**Si**  $\gcd(n, r) \neq 1$  **alors**  $n$  est COMPOSE **fsi**

**Si**  $r$  est premier  $\geq 2$  **alors**

soit  $q$  le plus grand facteur premier de  $r - 1$  ;

**Si** ( $q \geq 4\sqrt{r} \log n$ ) **et** ( $n^{\frac{r-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{r}$ ) **alors** ARRET ;

**fsi**

$r \leftarrow r + 1$

**ftq**

**Pour**  $a \leftarrow 1$  **jusqu'à**  $2\sqrt{r} \log n$  **faire**

**Si**  $(x - a)^n \not\equiv (x^n - a) \pmod{(x^r - 1, n)}$  **alors**  $n$  est COMPOSE **fsi**

**fpour**

$n$  est PREMIER

## Preuve de l'identité

$$\text{si } \gcd(a, p) = 1, \quad [(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{p} \Leftrightarrow p \text{ premier}]$$

Si  $p$  premier,  $p \mid \binom{p}{r} = \frac{p(p-1)!}{r!(p-r)!}$  pour  $1 \leq r \leq p - 1$  et

$(x - a)^p \equiv (x^p - a^p) \pmod{p} \equiv x^p - a \pmod{p}$  par Fermat-Euler.

Réciproquement, supposons  $p$  composé. Alors il existe  $q$  premier diviseur de  $p$  et soit  $q^k$  la plus grande puissance de  $q$  qui divise  $p$ .

$q^k$  ne divise pas  $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{q^k \alpha (p-1)!}{q(q-1)!(p-q)!}$  et  $q^k$  est premier avec  $a^{p-q}$ . Le coefficient de  $x^q$  dans le développement de  $(x - a)^p$  n'est pas nul alors qu'il l'est dans le membre droit de l'identité, une contradiction.

Exponentiation modulaire pour calculer  $a^b \pmod{n}$ 

## Algorithme

Exponentiation modulaire ( $a, b, n$ )

$d \leftarrow 1$  ;

Soit  $\langle b_k, b_{k-1}, \dots, b_0 \rangle$  la représentation binaire de  $b$

Pour  $i \leftarrow 0$  jusqu'à  $k$  faire

$d \leftarrow (d \cdot d) \pmod{n}$  ;

si  $b_i = 1$  alors

$d \leftarrow (d \cdot a) \pmod{n}$  ;

**fsi**

**fpour**

renvoie  $d$



## A la main

$$17^{71} \bmod 133. 71 = \langle 1000111 \rangle$$

$i$	$b_i$	$17^{2^i}$	$17^{2^i} \bmod 133$	valeur
0	1	17	17 mod 133	17
1	1	$17^2$	289 mod 133	23
2	1	$23^2$	529 mod 133	130
3	0	$130^2$	16900 mod 133	9
4	0	$9^2$	81 mod 133	81
5	0	$81^2$	6561 mod 133	44
6	1	$44^2$	1936 mod 133	74

$$\text{et } 17^{71} = 17 \cdot 17^2 \cdot 17^{2^3} \cdot 17^{2^6} = 17 \cdot 23 \cdot 130 \cdot 74 \bmod 133 = 47.$$

## Preuve de RSA

Avec  $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ ,

$$M^{ed} \equiv M^{k\varphi(n)+1} \pmod{n}$$

Par Euler,  $M^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow M^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  si

$$\gcd(M, p) = 1$$

Et comme  $(p-1) | \varphi(n)$ ,

$$M^{k\varphi(n)+1} \equiv M \pmod{p}$$

(trivialement vrai si  $M \equiv 0 \pmod{p}$ )

De même pour  $q$  :

$$M^{k\varphi(n)+1} \equiv M \pmod{q}$$

(trivialement vrai si  $M \equiv 0 \pmod{q}$ )

On a :  $M^{ed} \equiv M \pmod{pq}$

## Chiffrement RSA

- 1 choisir  $p$  et  $q$  premiers assez grands -de l'ordre de  $10^{100}$
- 2 fixer  $n = pq$  et publier  $n$
- 3 calculer  $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
- 4 choisir et publier  $e / \gcd(e, \varphi(n)) = 1$  (clé publique, *encipher*)
- 5 calculer  $d$  tq  $d \cdot e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$  (clé privée, *decipher*)

Chiffrer :  $E : M \mapsto M^e \bmod n$ .

Déchiffrer :  $D : C \mapsto C^d \bmod n$  ( $d$  est la trappe).

**Implémentations** : logicielles, matérielles et même mixtes.

Sur des cartes dédiées, RSA environ 1000 fois plus lent que DES.

## Exemple

A et B utilisent RSA avec  $n = 133$ . La clé publique de A est 35.

- 1 quelle est sa clé privée ?
- 2 si le chiffré reçu par A est 17, retrouver le clair. (Les messages sont compris entre 0 et  $n-1$ ).

**Clé privée de A ?** Factoriser  $n$  en produit de 2 premiers ; on trouve  $n = 133 = 7 \times 19$ .  $\varphi(133) = 6 \cdot 18 = 108$ .

Les premiers nombres premiers sont 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Avec  $e = 35$ ,  $d \equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$ . Euclide (35, 108) donne les coefs de Bezout  $(-37, 12)$ . D'où  $d = -35 = 108 - 37 = 71 \pmod{108}$ .

**Cryptanalyse de A = 17**, il suffit de calculer  $17^{71} \bmod 133 = 47$

## Textbook RSA

- $\text{Gen}(1^\tau)$  construit  $p, q$  premiers tq  $|p| = |q| \approx \frac{1}{2c^3} \tau^3$  et donne  $\text{pk}=(e, n)$  et  $\text{sk}=(p, q, n, e, d)$  ( $c$  petite constante  $\approx 8^1$ ).
- $\text{Enc}_{\text{pk}}(m)$  pour  $m \in \{0, 1\}^*$  découpe  $m$  en  $|m|/(|n| - 1)$  blocs de  $|n| - 1$  bits en on applique le chiffre à chaque  $m_i$
- $\text{DEC}_{\text{sk}}(c)$  déchiffre bloc par bloc les  $c_i$

### Hypothèse (hypothèse RSA)

Calcul infaisable : pour un  $\tau$  assez grand, le calcul de  $m$  sur l'entrée  $((e, n), c)$  avec RSA défini comme précédemment et  $m \xleftarrow{\mathcal{U}} \mathbb{Z}_n^*$ .

Correspond à la définition de OW.

► Retour def. OW

1. valeur de  $c$  fixée par algo. de factorisation

## Attaque sur les paramètres

**Cycles** : Eve observe  $c = m^e \pmod n$ ; elle essaye de trouver  $\nu$  t.q.

$$c^{e^\nu} \equiv c \pmod n \Leftrightarrow e^\nu \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

Ce qui permet de trouver  $m \equiv c^{e^{\nu-1}} \pmod n$

En effet  $c^{e^\nu} \equiv c \pmod n \Leftrightarrow c^{e^\nu-1} \equiv 1 \pmod n$  et, par d'Euler, on a  $e^\nu - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(n)} \Leftrightarrow e^\nu \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ . Comme  $c = m^e \pmod n$  et  $de \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ , on peut prendre  $d = e^{\nu-1}$ .

### Exemple

Publics :  $e$  et  $n$ , 35 et 133. Eve intercepte  $c = 69$  et calcule

$i$	2	3	4
$c^{e^i}$	69	27	69

Il n'y a plus qu'à « lire »  $m$  pour  $i = 3$ , soit 27 (cycle de long. 2).

## Low exponent attacks

On n'a pas toujours besoin de factoriser  $n$

- dans le cas où le clair  $m$  est chiffré par des PK  $(e, n_1), (e, n_2), (e, n_3) \dots$  avec un même  $e$ .

$$c_1 = m^e \pmod{n_1}, \quad c_2 = m^e \pmod{n_2}, \quad c_3 = m^e \pmod{n_3}$$

- possible de retrouver  $m$  à partir des chiffrés
- des implémentations de RSA utilisent  $e = 3$  (ou 65537 ss1)

Eve peut retrouver  $m$  ainsi en supposant les  $n_i$  premiers 2 à 2 (sinon Eve pourrait factoriser l'un des  $n_i$ ). Par le Th. Chinois des restes, Eve calcule  $c = m^3 \pmod{n_1 n_2 n_3}$ . Comme  $m < n_1, n_2, n_3, m < n_1 n_2 n_3$  d'où  $c = m^3$  qui devient une équation sur  $\mathbb{N}$ .  $m$  peut être retrouvé en calculant la racine cubique de  $c$ .

## Correctif de sécurité RSA-OAEP

Utiliser du random padding comme OAEP (1995) permet de contrer les attaques "low exponent".

Optimal Asymmetric Encryption Padding est une forme de chiffre de Feistel qui utilise une source aléatoire et 2 fonctions de hachage (oracle aléatoire).

Pour un clair  $M$ , un aléa  $r$  et  $g, h$  deux fonctions de hachage :

$$\text{OAEP}(M) = (M \oplus g(r)) || (r \oplus h(M \oplus g(r)))$$

Retrouver  $M$  connaissant,  $n$  la longueur de  $M$  :

- découper  $\text{OAEP}(M)$  en  $B_1$  de longueur  $n$  et  $B_2$
- $r = h(B_1) \oplus B_2$
- $M = B_1 \oplus g(r)$

Utilisé avec RSA, c'est RSA-OAEP, prouvé sémantiquement sûr. Mais avec quelles fonctions de hachage ? (elles sont définies à partir de SHA1)

## Si le module $n$ est commun à tous les utilisateurs

On distribue un message commun à deux utilisateurs.  $m$  est envoyé aux deux utilisateurs de paramètres publics respectifs  $(e_1, n)$  et  $(e_2, n)$  qui vérifient  $\gcd(e_1, e_2) = 1$ .  
Fred intercepte  $m^{e_1}$  et  $m^{e_2}$ . Il ne lui reste plus qu'à calculer avec Euclide étendu  $u, v \in \mathbb{N}$  tq  $ue_1 + ve_2 = 1$  le clair :

$$(m^{e_1})^u (m^{e_2})^v \equiv m \pmod{n}$$

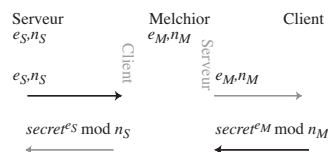
### Exemple

le module partagé est 143 et les exposants de chiffrement respectifs sont  $e_1 = 17$  et  $e_2 = 19$ . On distribue  $m = 123$  en envoyant  $123^{17} = 106$  au premier utilisateur et  $123^{19} = 72$  au second. Fred calcule alors les coefficients de Bezout du  $\text{pgcd}(17, 19) = (9, -8)$  et retrouve  $m = 106^9 72^{-8} \pmod{143} = 123$ .

## L'attaque de l'homme du milieu ("man in the middle")

Porte sur la communication des clés.

- Bob (client) demande ses paramètres publics à Alice (serveur)
- Alice envoie  $(e_S, n_S)$  à Bob
- Melchior intercepte  $(e_S, n_S)$  et envoie ses paramètres  $(e_M, n_M)$
- Bob chiffre en utilisant à son insu  $(e_M, n_M)$  et envoie  $c$
- Melchior intercepte le message  $c$  et le déchiffre en secret
- Melchior rechiffre secret avec  $(e_S, n_S)$  et le transmet à Alice...



Ah ! si Bob avait pu s'assurer que les données venaient d'Alice.

## Attaque à $\varphi(n)$ connu

Connaître  $(n, \varphi(n))$  revient à connaître la factorisation de  $n$  [3].

En effet, en posant :  $\begin{cases} n = pq \\ \varphi(n) = (p-1)(q-1) \end{cases}$  et  $q = \frac{n}{p}$  :

$$\varphi(n) - (p-1) \left( \frac{n}{p} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow p^2 + p(\varphi(n) - n - 1) + n = 0$$

équation du second degré de solutions  $p$  et  $q$ .

Calcul de  $\varphi(n)$  aussi difficile que la factorisation de  $n$ .

### Exemple

Connus  $n = p \cdot q = 133$  et  $\varphi(n) = 108$ . On pose

$$\varphi(n) - (p-1) \left( \frac{n}{p} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow p^2 + p(\varphi(n) - n - 1) + n = 0$$

Soit  $p^2 + p(108 - 133 - 1) + 133 = 0 \Leftrightarrow p^2 - 26 \cdot p + 133 = 0$  de discriminant  $\Delta = (-26)^2 - (4 \cdot 133) = 144 = 12^2$  et de solutions  $p = \frac{26 \pm 12}{2} = \{19, 7\}$ .

## Sûreté calculatoire

RSA est aussi sûr que la factorisation de  $n$  est difficile.

Complexité de quelques « bons » algorithmes de factorisation :

crible quadratique	$O(e^{((1+o(1))\sqrt{\log n \log \log n})})$
courbes elliptiques	$O(e^{((1+o(1))\sqrt{2 \log p \log \log p})})$
crible algébrique	$O(e^{((1,92+o(1))(\log n)^{1/3}(\log \log n)^{2/3})})$

( $p$  : plus petit facteur premier de  $n$ ).

## Sécurité sémantique

Pour qu'un chiffre à clé publique soit sémantiquement sûr (IND-CPA), il faut que l'adversaire (avec une puissance calculatoire limitée) soit incapable d'obtenir des informations significatives sur le clair à partir de la donnée du du chiffré et de la clé publique. La sécurité sémantique ne considère que le cas d'un adversaire « passif » qui observe les chiffrés.

## Insécurité prouvée de RSA





- RSA n'est pas sémantiquement sûr
- $\text{Enc}_{pk}(m)$  révèle des informations sur  $m$  !
  - il suffit de connaître le symbole de Jacobi de  $m$  :

$$\left(\frac{m^e}{n}\right) = \left(\frac{m^e}{p}\right) \left(\frac{m^e}{q}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) \left(\frac{m}{q}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$$

- vient du fait que le chiffrement par RSA est déterministe !
- pourquoi un chiffrement déterministe empêche-t'il la sécurité sémantique ?

## Distinguabilité

- contredire IND-CPA : Ciphertext Distinguishability Pb (CDP)
- chiffre sémantiquement sûr si CDP est infaisable
- (attaquant peut avoir à sa disposition un dictionnaire clair/chiffrés et choisir le défi parmi eux.)

-  G. Brassard.  
Cryptologie contemporaine.  
Logique, mathématiques, informatique. Masson, 1993.
-  W. Diffie and M.E. Hellman.  
New directions in cryptography.  
IEEE Trans. on Inform. Theory, 22(6) :644–654, 1976.
-  N. Koblitz.  
A course in number theory and cryptography.  
Graduate texts in mathematics. Springer Verlag, 1987.
-  A. Salomaa.  
Public Key Cryptography.  
EATCS monographs. Springer Verlag, 1990.
-  G. Zémor.  
Cours de cryptographie.  
Cassini, 2000.