M1 Info - Optimisation et Recherche Opérationnelle

Cours 3 - Branching

Stable Maximum

Semestre Automne 2021-2022 - Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-lyon1.fr

département Informatique
Faculté des Sciences et Technologies
Université Claude Bernard Lyon 1

Problème du stable maximum

Cadre : graphes simples, non orientes et sans boucles

Définition

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux a deux non adjacents (aucune arete entre les sommets de S).
Un stable maximum est un stable S dont le nombre de sommets $|S|$ est maximum (parmi tous les stables de G).

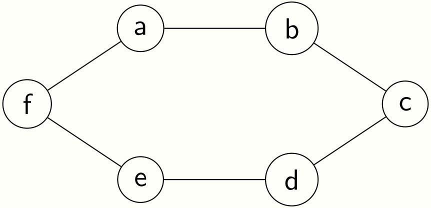
Problème du stable maximum

Cadre : graphes simples, non orientes et sans boucles

Définition

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux a deux non adjacents (aucune arete entre les sommets de S).

Un stable maximum est un stable S dont le nombre de sommets $|S|$ est maximum (parmi tous les stables de G).

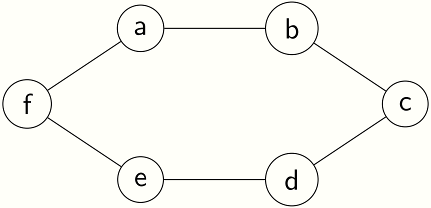


Problème du stable maximum

Cadre : graphes simples, non orientes et sans boucles

Définition

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux a deux non adjacents (aucune arete entre les sommets de S).
Un stable maximum est un stable S dont le nombre de sommets $|S|$ est maximum (parmi tous les stables de G).



Remarque : Stable maximum $\neq$ stable maximal

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Exemple : Quel est le nombre maximum de seances de CM/TD/TP qu'un etudiant du M1 peut suivre cette semaine ?

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Exemple : Quel est le nombre maximum de seances de CM/TD/TP qu'un etudiant du M1 peut suivre cette semaine ?

Les sommets sont les seances de CM/TD/TP de cette semaine et on met une arete entre deux seances si leurs deux plages horaires ont une intersection non vide.

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Difficulte de calcul : **NP-complet** ($\Rightarrow$ presomption de non existence d'algo polynomial pour le resoudre)

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Difficulte de calcul : **NP-complet** ($\Rightarrow$ presomption de non existence d'algo polynomial pour le resoudre)

Remarque : pas facile de predire la difficulte d'un probleme
comparez Flot Maximum et Stable Maximum, lequel a l'air le plus dur ?

Approche brute force

Algo brute force :

- on considere un par un tous les sous-ensembles de sommets
- pour chacun, on teste si c'est un stable
- on en garde un qui realise le maximum de la taille

Approche brute force

Algo brute force :

- on considere un par un tous les sous-ensembles de sommets
- pour chacun, on teste si c'est un stable
- on en garde un qui realise le maximum de la taille

Complexite :

- il y a 2^n sous-ensembles S de V
- tester si S est un stable peut se faire en $O(n+m)$

Total : $O((n+m) \cdot 2^n)$, on ecrit aussi $O^*(2^n)$

Approche brute force

Algo brute force :

- on considere un par un tous les sous-ensembles de sommets
- pour chacun, on teste si c'est un stable
- on en garde un qui realise le maximum de la taille

Complexite :

- il y a 2^n sous-ensembles S de V
- tester si S est un stable peut se faire en $O(n+m)$

Total : $O((n+m) \cdot 2^n)$, on ecrit aussi $O^*(2^n)$

On va faire un algo exponentiel plus rapide ($O(1.45^n)$) en s'appuyant sur 2 proprietes simples, par la technique du branching.

Gain de complexite

On va faire un algo exponentiel plus rapide ($O(1.45^n)$) en s'appuyant sur 2 proprietes simples, par la technique du branching.

Gain de complexite

On va faire un algo exponentiel plus rapide ($O(1.45^n)$) en s'appuyant sur 2 proprietes simples, par la technique du branching.

$\frac{2^n}{1.45^n} =$

pour $n = 100$,

Premieres proprietes

Propriete

Si S est un stable et $x \in S$ alors $S \cap N(x) = \varnothing$.

Propriete

Si S est un stable maximum (donc maximal) et $x \in V$ alors $S \cap (\{x\} \cup N(x)) \neq \varnothing$.

Branching

Idee generale :

- faire une "disjonction" de cas qui tombe sur des problemes de taille reduite
- resoudre **recursivement** chaque probleme reduit
- garder le meilleur resultat

Branching

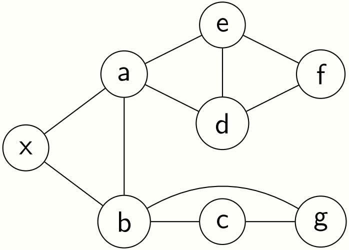
Pour Stable Maximum, ca donne :

- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$

Branching

Pour Stable Maximum, ca donne :

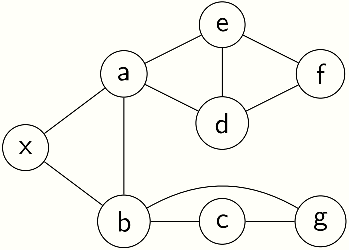
- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$



Branching

Pour Stable Maximum, ca donne :

- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$

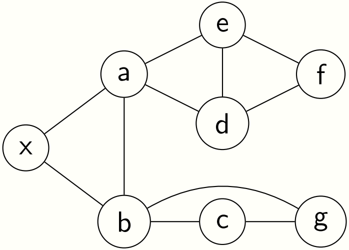


- pour la solution sur G on prend la meilleure obtenue sur les $\tilde{G}_y$

Branching

Pour Stable Maximum, ca donne :

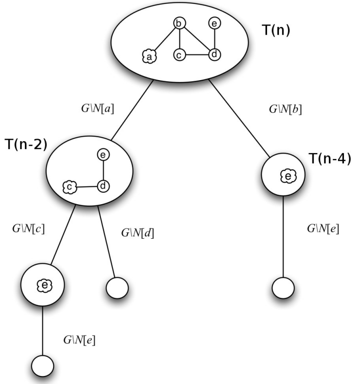
- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$



- pour la solution sur G on prend la meilleure obtenue sur les $\tilde{G}_y$
- on choisit bien le sommet x avec lequel on fait ca : un sommet de degre minimum

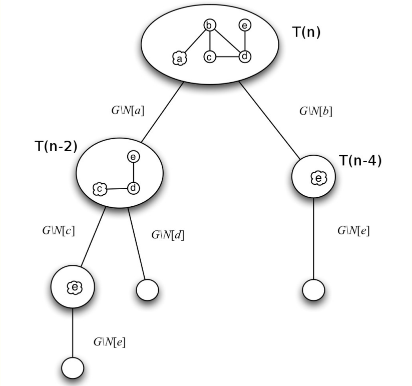
Analyse de l'algorithme

- **Le truc essentiel :** structure arborescente



Analyse de l'algorithme

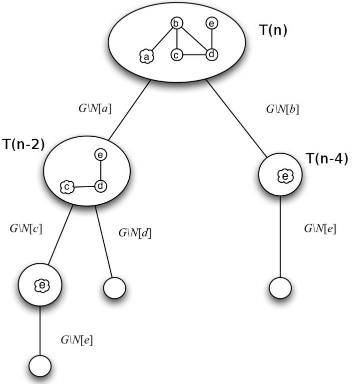
- **Le truc essentiel :** structure arborescente



- **Correction :** OK car on couvre tous les cas

Analyse de l'algorithme

- **Le truc essentiel :** structure arborescente



- **Correction :** OK car on couvre tous les cas
- **Complexite :**
  - le traitement sur chaque noeud de l'arbre prend $O(n+m)$
  - complexite totale $O((n+m) \cdot T(n))$
    ou $T(n)$ **est le nombre de noeuds de l'arbre de recursion**, dans le pire des cas, pour un graphe d'au plus n sommets

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets
- de plus comme x est de degre minimum on a $\forall i \in [\![1, d]\!], d(y_i) \geq d$

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

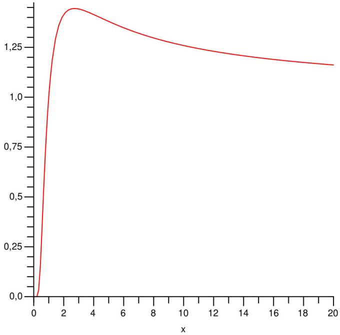
- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n-d-1, n-d(y_1)-1, n-d(y_2)-1, \dots, n-d(y_d)-1$ sommets
- de plus comme x est de degre minimum on a $\forall i \in [\![1, d]\!], d(y_i) \geq d$
- par monotonicite de $T(.)$, on a donc $T(n) \leq 1 + T(n-d-1) + \sum_{1 \leq i \leq d} T(n-d-1) =$
  $1 + (d+1)T(n-(d+1))$
  C'est a dire $T(n) \leq 1 + (s)T(n-s)$, en posant $d+1 = s$.

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets
- de plus comme x est de degre minimum on a $\forall i \in [\![1, d]\!], d(y_i) \geq d$
- par monotonicite de $T(.)$, on a donc $T(n) \leq 1 + T(n - d - 1) + \sum_{1 \leq i \leq d} T(n - d - 1) =$
  $1 + (d+1)T(n - (d+1))$
  C'est a dire $T(n) \leq 1 + (s)T(n - s)$, en posant $d + 1 = s$.
- d'ou, si tous les sommets sur lequel on branche dans l'algo sont de degres d :
  $T(n) \leq 1 + s + s^2 + \cdots + s^{n/s} = \frac{1 - s^{1+n/s}}{1-s} = O(s^{n/s})$

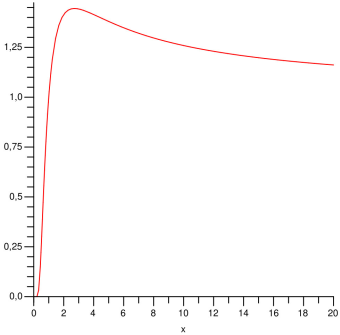
Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- en etudiant la fonction $s^{1/s}$, on s'apercoit qu'elle admet un maximum sur les s entiers pour $s = 3$, on obtient alors $T(n) = O(3^{n/3})$ soit $T(n) = O(1.45^n)$...



Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

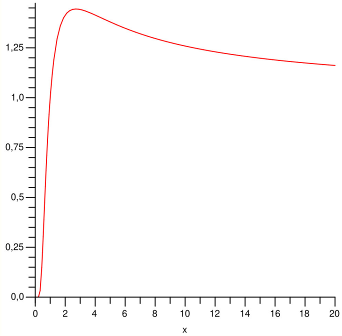
- en etudiant la fonction $s^{1/s}$, on s'apercoit qu'elle admet un maximum sur les s entiers pour $s = 3$, on obtient alors $T(n) = O(3^{n/3})$ soit $T(n) = O(1.45^n)$...



- ... si on ne branche que sur des sommets de meme degre ! ! ! !

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- en etudiant la fonction $s^{1/s}$, on s'apercoit qu'elle admet un maximum sur les s entiers pour $s = 3$, on obtient alors $T(n) = O(3^{n/3})$ soit $T(n) = O(1.45^n)$...



- ... si on ne branche que sur des sommets de meme degre ! ! ! !
- ca reste vrai dans le cas general car on a choisi le "pire" d=3

Comparaison directe de l'efficacite des branchements

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Branching factor.** Si tous les branchements sont les memes on se retrouve a resoudre :

$$T(n) \leq T(n - t_1) + T(n - t_2) + \cdots + T(n - t_r)$$

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Branching factor.** Si tous les branchements sont les memes on se retrouve a resoudre :

$$T(n) \leq T(n - t_1) + T(n - t_2) + \cdots + T(n - t_r)$$

Maths $\Rightarrow T(n) \leq \alpha^n$ ou α est l'unique racine reelle du polynome $x^n - x^{n-t_1} - x^{n-t_2} - \cdots - x^{n-t_r}$.
α est appele le branching factor de $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$, note $\tau(t_1, t_2, \ldots, t_r)$

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Branching factor.** Si tous les branchements sont les memes on se retrouve a resoudre :

$$T(n) \leq T(n - t_1) + T(n - t_2) + \cdots + T(n - t_r)$$

  Maths $\Rightarrow$ $T(n) \leq \alpha^n$ ou α est l'unique racine reelle du polynome $x^n - x^{n-t_1} - x^{n-t_2} - \cdots - x^{n-t_r}$.
  α est appele le branching factor de $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$, note $\tau(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Maths** $\Rightarrow$ si dans T on a des branchements avec des branching vector differents, on a quand meme $T(n) \leq \alpha^n$ avec α le plus grand (donc le pire) des branching factor dans T

Remarques finales sur l'algo

Question :

Pourquoi gagne-t-on du temps par rapport a l'algo brute force ?

Remarques finales sur l'algo

Question :

Pourquoi gagne-t-on du temps par rapport a l'algo brute force ?

Remarque

Avec cet algo de branching pour stable max, on a en fait tous les stables maximum.

Remarques finales sur l'algo

Question :

Pourquoi gagne-t-on du temps par rapport a l'algo brute force ?

Remarque

Avec cet algo de branching pour stable max, on a en fait tous les stables maximum.

... par contre on les a plusieurs fois chacun.