M1 Info - Optimisation et Recherche Opérationnelle

Cours 7 - Programmation lineaire et en nombres entiers

Flot maximum, coupe minimum et couverture par sommets

Semestre Automne 2021-2022 - Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-lyon1.fr

département
Informatique

Faculté des Sciences et Technologies
Université Claude Bernard Lyon 1

Programmation lineaire

Probleme en forme standard :

- **Entrée :**
  - m reels $b_1, b_2, \ldots, b_m$
  - n reels $c_1, c_2, \ldots, c_n$
  - mn reels a_{ij} pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$

- **Sortie :** n nombres reels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui
  - maximisent $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
  - sous les contraintes :
    - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, pour $i \in [\![1, m]\!]$ et
    - $x_j \geq 0$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

Difficulte de calcul : **Polynomial**

Mise en forme matricielle

maximiser c_1x_1	$+$	c_2x_2	$+$	c_3x_3	$+$	c_4x_4	sous contraintes :	
$a_{11}x_1$	$+$	$a_{12}x_2$	$+$	$a_{13}x_3$	$+$	$a_{14}x_4$	$\leq$	b_1
$a_{21}x_1$	$+$	$a_{22}x_2$	$+$	$a_{23}x_3$	$+$	$a_{24}x_4$	$\leq$	b_2
$a_{31}x_1$	$+$	$a_{32}x_2$	$+$	$a_{33}x_3$	$+$	$a_{34}x_4$	$\leq$	b_3
$\forall i \in [\![1,4]\!], x_i \geq 0$								

Mise en forme matricielle

maximiser $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ sous contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & \leq & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & \leq & b_3
\end{array}$$

$\forall i \in [\![1, 4]\!], x_i \geq 0$

maximiser :

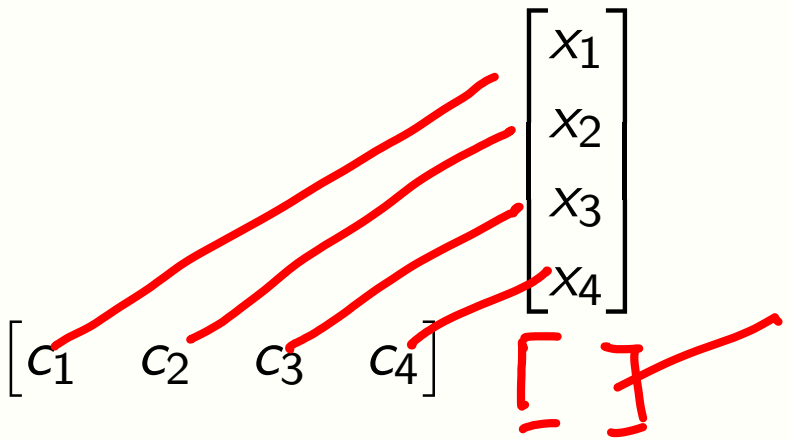
$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

sous contraintes :

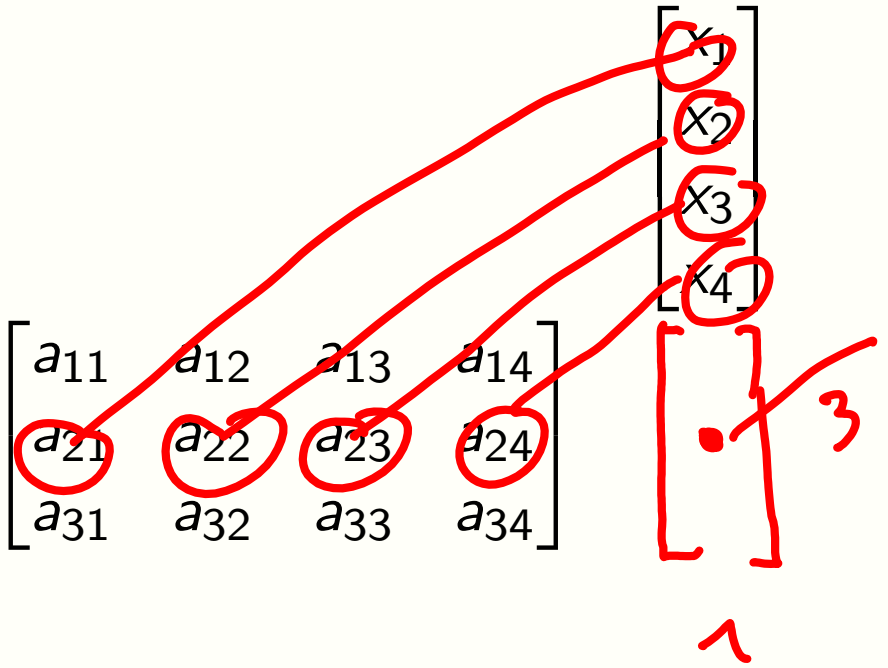
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

et $\forall i \in [\![1, 4]\!], x_i \geq 0$

Rappel produit matriciel



$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$



$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$

Programmation lineaire : exemple

Probleme : Un magasin veut faire fabriquer des pantalons et des vestes de sport a une usine textile qui dispose de $750m^2$ de cotton et $1000m^2$ de polyester. La fabrication d'une paire de pantalon recquiert $1m^2$ de cotton et $2m^2$ de polyester et celle d'une veste recquiert $1.5m^2$ de cotton et $1m^2$ de polyester. Sachant que le benefice du magasin sur une paire de pantalon est de 50$ et de 40$ pour une veste, quelle est la commande que doit passer le magasin pour maximiser son benefice total ?

x : # pantalons

y : # vestes.

Max $50x + 40y$

11 contraintes

$1x + 1.5y \leq 750$

$2x + 1y \leq 1000$

Programmation lineaire : exemple

Probleme : Un magasin veut faire fabriquer des pantalons et des vestes de sport a une usine textile qui dispose de $750m^2$ de cotton et $1000m^2$ de polyester. La fabrication d'une paire de pantalon recquiert $1m^2$ de cotton et $2m^2$ de polyester et celle d'une veste recquiert $1.5m^2$ de cotton et $1m^2$ de polyester. Sachant que le benefice du magasin sur une paire de pantalon est de 50\$ et de 40\$ pour une veste, quelle est la commande que doit passer le magasin pour maximiser son benefice total ?

Modelisation : x le nombre de pantalons commandes et y celui de vestes. On veut :

- maximiser $50x + 40y$
- sous les contraintes :

Programmation lineaire : exemple

Probleme : Un magasin veut faire fabriquer des pantalons et des vestes de sport a une usine textile qui dispose de $750m^2$ de cotton et $1000m^2$ de polyester. La fabrication d'une paire de pantalon recquiert $1m^2$ de cotton et $2m^2$ de polyester et celle d'une veste recquiert $1.5m^2$ de cotton et $1m^2$ de polyester. Sachant que le benefice du magasin sur une paire de pantalon est de 50\$ et de 40\$ pour une veste, quelle est la commande que doit passer le magasin pour maximiser son benefice total ?

Modelisation : x le nombre de pantalons commandes et y celui de vestes. On veut :

- maximiser $50x + 40y$
- sous les contraintes :
  - $x + 1.5y \leq 750$

Programmation lineaire : exemple

Probleme : Un magasin veut faire fabriquer des pantalons et des vestes de sport a une usine textile qui dispose de $750m^2$ de cotton et $1000m^2$ de polyester. La fabrication d'une paire de pantalon recquiert $1m^2$ de cotton et $2m^2$ de polyester et celle d'une veste recquiert $1.5m^2$ de cotton et $1m^2$ de polyester. Sachant que le benefice du magasin sur une paire de pantalon est de 50\$ et de 40\$ pour une veste, quelle est la commande que doit passer le magasin pour maximiser son benefice total ?

Modelisation : x le nombre de pantalons commandes et y celui de vestes. On veut :

- maximiser $50x + 40y$
- sous les contraintes :
  - $x + 1.5y \leq 750$
  - $2x + y \leq 1000$

Programmation lineaire : exemple

Probleme : Un magasin veut faire fabriquer des pantalons et des vestes de sport a une usine textile qui dispose de $750m^2$ de cotton et $1000m^2$ de polyester. La fabrication d'une paire de pantalon recquiert $1m^2$ de cotton et $2m^2$ de polyester et celle d'une veste recquiert $1.5m^2$ de cotton et $1m^2$ de polyester. Sachant que le benefice du magasin sur une paire de pantalon est de 50\$ et de 40\$ pour une veste, quelle est la commande que doit passer le magasin pour maximiser son benefice total ?

Modelisation : x le nombre de pantalons commandes et y celui de vestes. On veut :

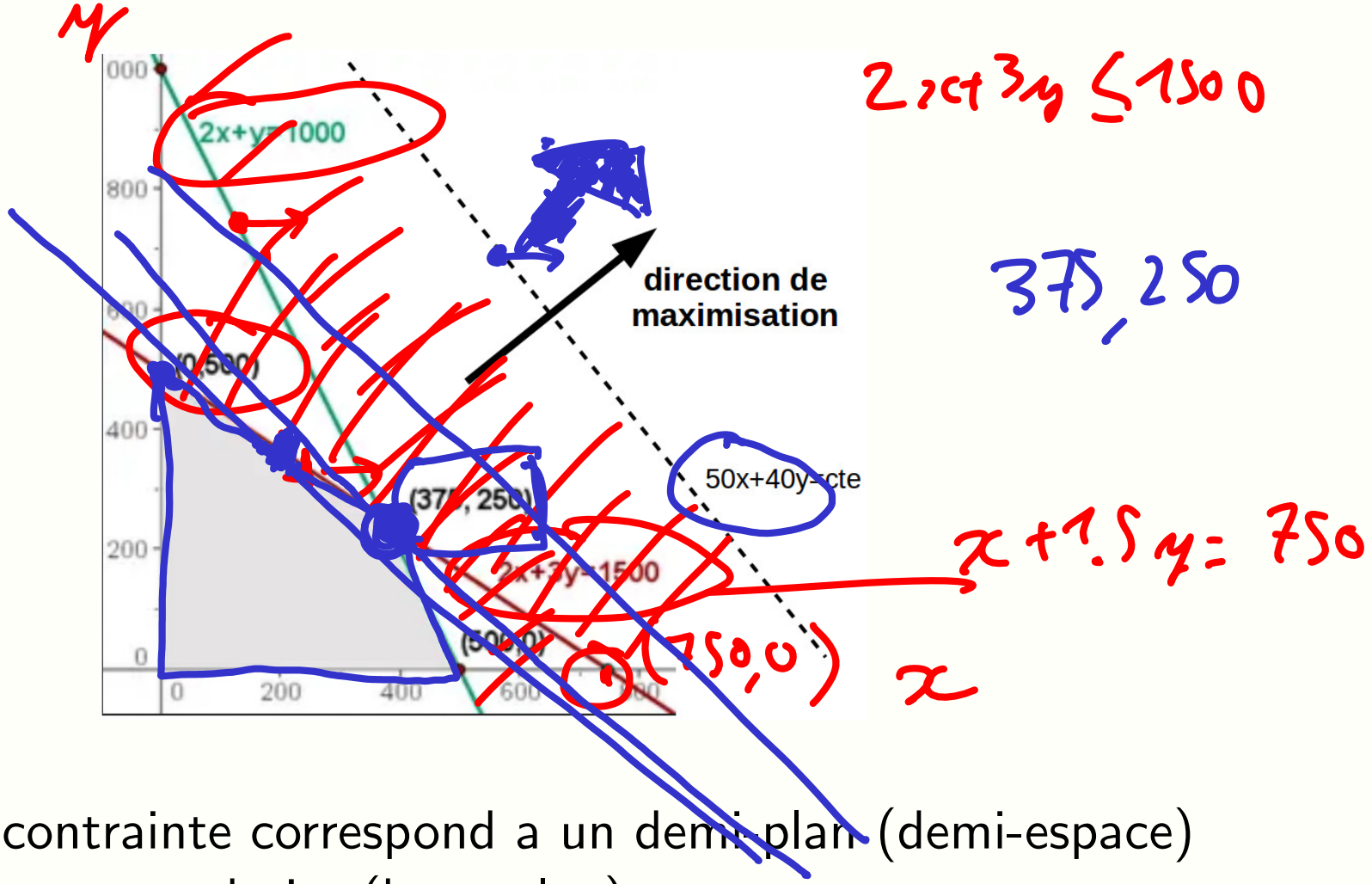
- maximiser $50x + 40y$
- sous les contraintes :
  - $x + 1.5y \leq 750$
  - $2x + y \leq 1000$
  - $x \geq 0$ et $y \geq 0$

form. standard

prog. lin.

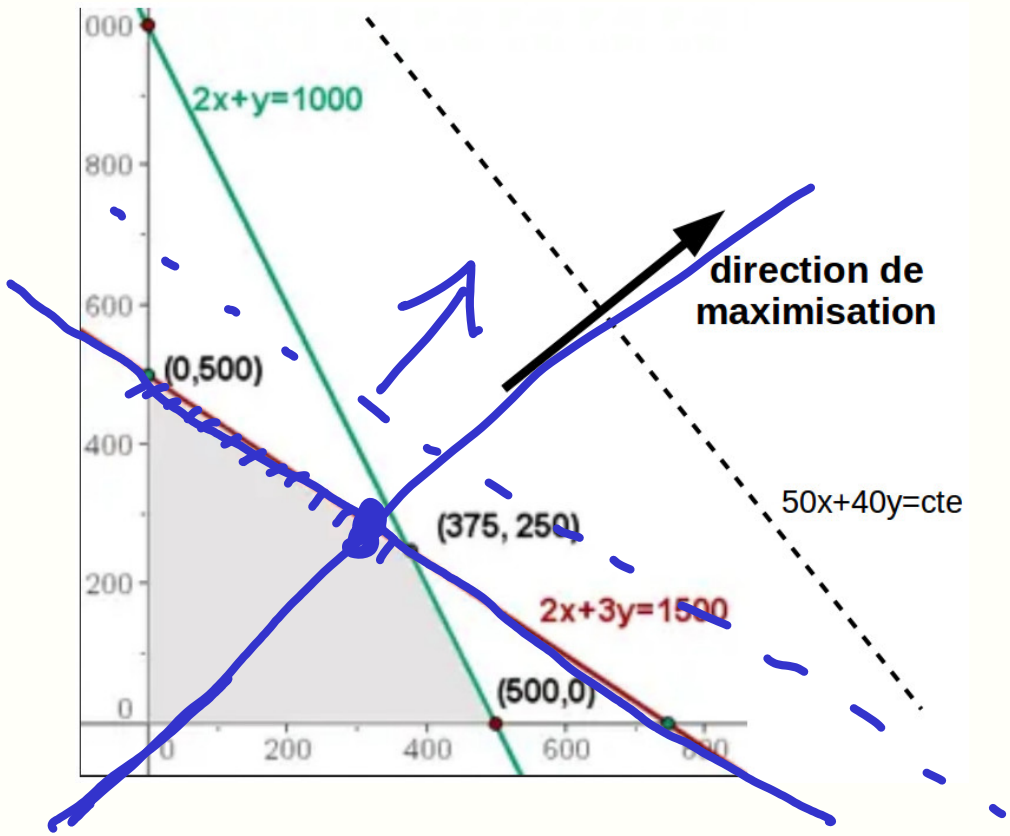
$x + 1.5y = 750$

Interpretation graphique



- chaque contrainte correspond a un demi-plan (demi-espace) delimite par une droite (hyperplan)
- la region des solutions faisables est un polyedre
- une solution maximum (lorsqu'elle existe) est atteinte sur un des sommets du polyedre

Interpretation graphique



- chaque contrainte correspond a un demi-plan (demi-espace) delimite par une droite (hyperplan)
- la region des solutions faisables est un polyedre
- une solution maximum (lorsqu'elle existe) est atteinte sur un des sommets du polyedre

Resolution de programmes lineaires

- il existe des algos polynomiaux
- le plus utilise en pratique est probablement simplex (qui n'est pas polynomial)
- simplex retourne soit :
  - "infaisable" lorsqu'il n'y a pas de solution realisable
  - "non borne" lorsqu'il n'y a pas de maximum (maximum=$+\infty$)
  - une solution optimale sinon

Formes non standard

- la fonction objectif peut etre une minimisation plutot qu'une maximisation
  - on multiplie par -1 : min $\rightarrow$ max
- il peut y avoir des contraintes de negativite sur les variables
  - $x_i \rightarrow -x_i$
- il peut y avoir des variables sans contraintes de positivite
  - $x_i \rightarrow x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$
- il peut y avoir des contraintes d'inegalites qui soient $\geq$ a la place de $\leq$
  - on multiplie par -1 : $\geq \rightarrow \leq$
- il peut y avoir des contraintes d'egalites plutot que d'inegalite
  - $= \rightarrow \leq$ et $\geq$, ou bien
  - on elimine une variable

Primal / dual

Primal :

$$\text{maximiser } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ sous contraintes :}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ pour } i \in [\![1, m]\!]$$

$$x_j \geq 0, \text{ pour } j \in [\![1, n]\!]$$

Primal / dual

Primal :

maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ sous contraintes :

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, pour $i \in [\![1, m]\!]$

$x_j \geq 0$, pour $j \in [\![1, n]\!]$

Dual :

minimiser $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ sous contraintes :

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, pour $j \in [\![1, n]\!]$

$y_i \geq 0$, pour $i \in [\![1, m]\!]$

Primal / dual

Primal :

maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ sous contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ pour } i \in [\![1, m]\!]$$

$$x_j \geq 0, \text{ pour } j \in [\![1, n]\!]$$

n var.

m éq.

Dual :

minimiser $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ sous contraintes :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \text{ pour } j \in [\![1, n]\!]$$

$$y_i \geq 0, \text{ pour } i \in [\![1, m]\!]$$

m var.

n éq.

Théorème (Dualite forte)

Si le primal admet une solution optimale, alors le dual aussi et les valeurs objectifs optimales des deux problemes sont egales.

Primal / dual

Primal :

maximiser $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ sous contraintes :

$$\begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & \leq & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & \leq & b_3 \end{array}$$

$\forall i \in [\![1, 4]\!], x_i \geq 0$

Dual :

minimiser $b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$ sous contraintes :

$$\begin{array}{lllllllll} a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & a_{31}y_3 & \geq & c_1 \\ a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & a_{32}y_3 & \geq & c_2 \\ a_{13}y_1 & + & a_{23}y_2 & + & a_{33}y_3 & \geq & c_3 \\ a_{14}y_1 & + & a_{24}y_2 & + & a_{34}y_3 & \geq & c_4 \end{array}$$

$\forall i \in [\![1, 3]\!], y_i \geq 0$

Primal / dual

Primal :

$$\text{maximiser } \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{sous contraintes } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Dual :

$$\text{minimiser } \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{sous contraintes } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Retour sur l'algorithme du simplexe

- il existe des algos polynomiaux
- le plus utilise en pratique est probablement simplex (qui n'est pas polynomial)
- simplex retourne soit :
  - "infaisable" lorsqu'il n'y a pas de solution realisable
  - "non borne" lorsqu'il n'y a pas de maximum (maximum=$+\infty$)
  - une solution optimale, sinon

- il existe une solution optimale pour le primal ssi il existe une solution optimale pour le dual et
- les valeurs objectifs de ces solutions optimales sont les memes pour le primal et le dual.

Retour sur l'algorithme du simplexe

- il existe des algos polynomiaux
- le plus utilise en pratique est probablement simplex (qui n'est pas polynomial)
- simplex retourne soit :
  - "infaisable" lorsqu'il n'y a pas de solution realisable
  - "non borne" lorsqu'il n'y a pas de maximum (maximum=$+\infty$)
  - une solution optimale, sinon

- il existe une solution optimale pour le primal ssi il existe une solution optimale pour le dual et
- les valeurs objectifs de ces solutions optimales sont les memes pour le primal et le dual.
- De plus, dans ce cas, simplex fournit aussi une solution optimale pour le dual.

Un exemple plus avance : flot maximum

maximiser f sous contraintes :

$$f(u,v) \leq c(u,v), \forall (u,v) \in A$$

$$\sum_{v \in N^+(s)} f(s,v) - \sum_{v \in N^-(s)} f(v,s) = f$$

$$\sum_{v \in N^+(t)} f(t,v) - \sum_{v \in N^-(t)} f(v,t) = -f$$

$$\sum_{v \in N^+(u)} f(u,v) = \sum_{v \in N^-(u)} f(v,u), \forall u \in V \setminus \{s,t\}$$

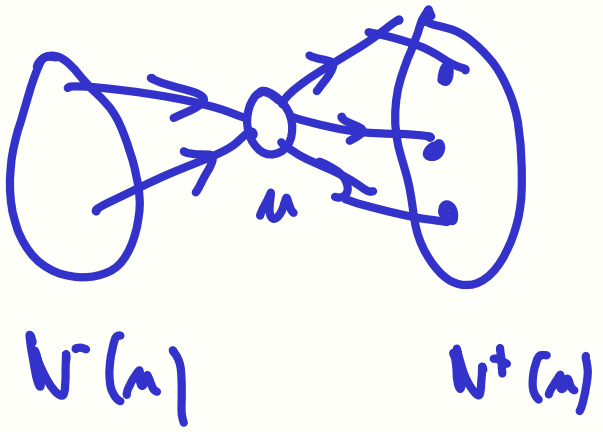
$$f(u,v) \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

Capacités

def de valeur du flot f

Conservation

$f = f^+ - f^-$



Passage au dual : forme standard du primal

Primal sous forme standard :

maximiser f sous contraintes :

$$f(u,v) \leq c(u,v), \forall (u,v) \in A$$

$$\sum_{v \in N^+(s)} f(s,v) - \sum_{v \in N^-(s)} f(v,s) - f \leq 0$$

$$- \sum_{v \in N^+(s)} f(s,v) + \sum_{v \in N^-(s)} f(v,s) + f \leq 0$$

$$\sum_{v \in N^+(t)} f(t,v) - \sum_{v \in N^-(t)} f(v,t) + f \leq 0$$

$$- \sum_{v \in N^+(t)} f(t,v) + \sum_{v \in N^-(t)} f(v,t) - f \leq 0$$

$$\sum_{v \in N^+(u)} f(u,v) - \sum_{v \in N^-(u)} f(v,u) \leq 0, \forall u \in V \setminus \{s,t\}$$

$$- \sum_{v \in N^+(u)} f(u,v) + \sum_{v \in N^-(u)} f(v,u) \leq 0, \forall u \in V \setminus \{s,t\}$$

$$f(u,v) \geq 0, \forall (u,v) \in A \text{ et } f \geq 0$$

Passage au dual : forme standard du primal

Primal sous forme standard :

maximiser f sous contraintes :

$$f(u,v) \leq c(u,v), \forall (u,v) \in A \quad \rightarrow y_{uv}$$

$$\sum_{v \in N^+(s)} f(s,v) - \sum_{v \in N^-(s)} f(v,s) - f \leq 0 \quad \rightarrow y_s^+$$

$$-\sum_{v \in N^+(s)} f(s,v) + \sum_{v \in N^-(s)} f(v,s) + f \leq 0 \quad \rightarrow y_s^-$$

$$\sum_{v \in N^+(t)} f(t,v) - \sum_{v \in N^-(t)} f(v,t) + f \leq 0 \quad \rightarrow y_t^+$$

$$-\sum_{v \in N^+(t)} f(t,v) + \sum_{v \in N^-(t)} f(v,t) - f \leq 0 \quad \rightarrow y_t^-$$

$$\sum_{v \in N^+(u)} f(u,v) - \sum_{v \in N^-(u)} f(v,u) \leq 0, \forall u \in V \setminus \{s,t\} \quad \rightarrow y_u^+$$

$$-\sum_{v \in N^+(u)} f(u,v) + \sum_{v \in N^-(u)} f(v,u) \leq 0, \forall u \in V \setminus \{s,t\} \quad \rightarrow y_u^-$$

$$f(u,v) \geq 0, \forall (u,v) \in A \text{ et } f \geq 0$$

Le dual

Dual :

minimiser $\sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

$$-y_s^+ + y_s^- + y_t^+ - y_t^- \geq 1$$

$$y_{uv} + y_u^+ - y_u^- - y_v^+ + y_v^- \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

$$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

$$y_u^+ \geq 0 \text{ et } y_u^- \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

Le dual

Dual :

minimiser $\sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

$$-y_s^+ + y_s^- + y_t^+ - y_t^- \geq 1$$
$$y_{uv} + y_u^+ - y_u^- - y_v^+ + y_v^- \geq 0, \forall (u,v) \in A$$
$$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$$
$$y_u^+ \geq 0 \text{ et } y_u^- \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

En posant $y_u^+ - y_u^- = y_u, \forall u \in$, on obtient :

minimiser $\sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

$$y_t - y_s \geq 1$$
$$y_{uv} + y_u - y_v \geq 0, \forall (u,v) \in A$$
$$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

Le dual... c'est Coupe Minimum !

Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

$y_t - y_s \geq 1$

$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$

$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$

Le dual... c'est Coupe Minimum !

Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

$y_t - y_s \geq 1$

$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$

$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$

Démonstration.

- obj est minimum pour $y_{uv} = \max\{y_v - y_u, 0\}$

Le dual... c'est Coupe Minimum !

Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

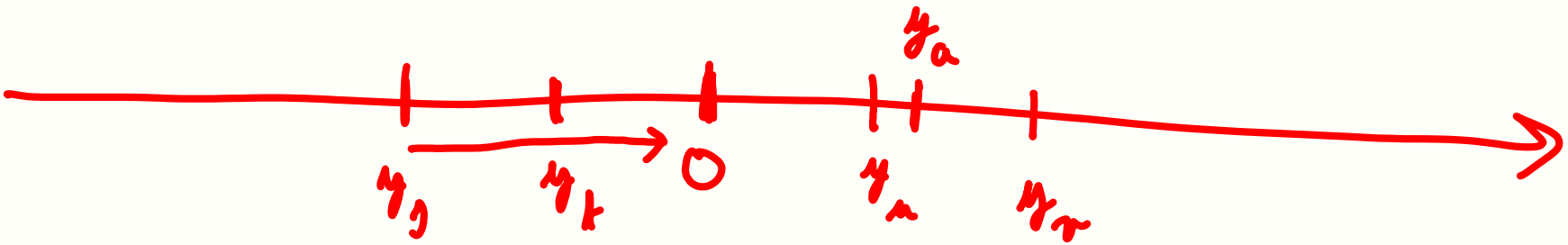
$y_t - y_s \geq 1$

$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$

$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$

Démonstration.

- obj est minimum pour $y_{uv} = \max\{y_v - y_u, 0\}$
- obj est invariant par translation : on peut prendre $y_s = 0$



Le dual... c'est Coupe Minimum !

Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

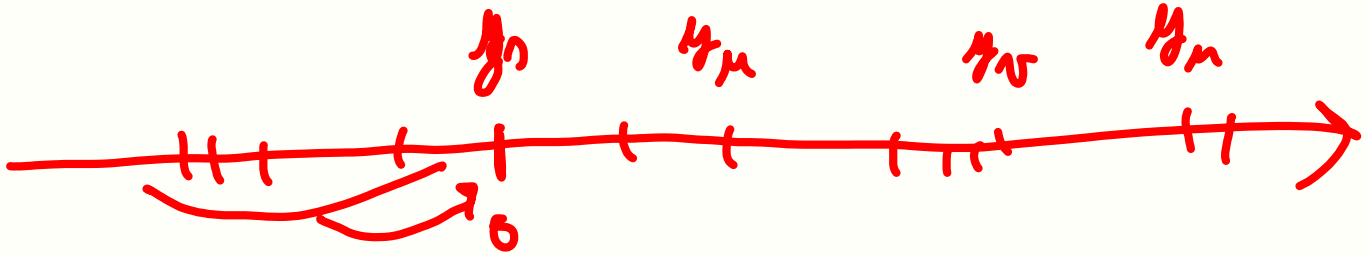
$y_t - y_s \geq 1$

$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$

$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$

Démonstration.

- *obj* est minimum pour $y_{uv} = \max\{y_v - y_u, 0\}$
- *obj* est invariant par translation : on peut prendre $y_s = 0$
- *obj* diminue si pour tous les $y_u < 0$ on prend $y_u = 0$



Le dual... c'est Coupe Minimum !

Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

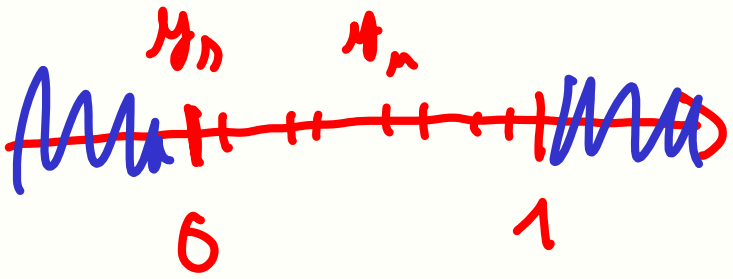
$y_t - y_s \geq 1$

$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$

$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$

Démonstration.

- obj est minimum pour $y_{uv} = \max\{y_v - y_u, 0\}$
- obj est invariant par translation : on peut prendre $y_s = 0$
- obj diminue si pour tous les $y_u < 0$ on prend $y_u = 0$
- obj diminue si pour tous les $y_v > 1$ on prend $y_v = 1$



Le dual... c'est Coupe Minimum !

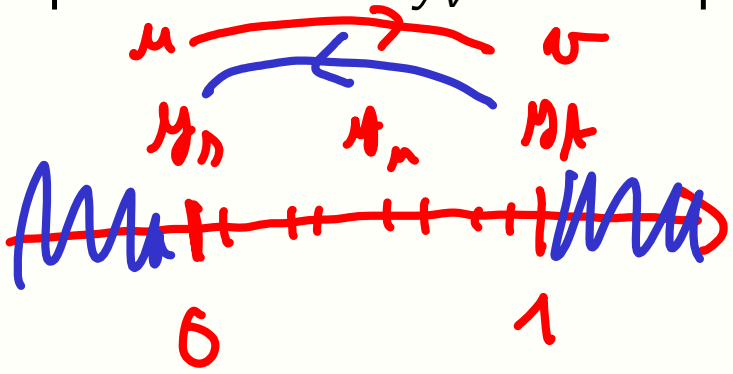
Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

$$y_t - y_s \geq 1$$
$$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$$
$$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$$

Démonstration.

- obj est minimum pour $y_{uv} = \max\{y_v - y_u, 0\}$
- obj est invariant par translation : on peut prendre $y_s = 0$
- obj diminue si pour tous les $y_u < 0$ on prend $y_u = 0$
- obj diminue si pour tous les $y_v > 1$ on prend $y_v = 1$ ($\Rightarrow y_t = 1$)



Le dual... c'est Coupe Minimum !

Dual :

minimiser $obj = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)y_{uv}$ sous contraintes :

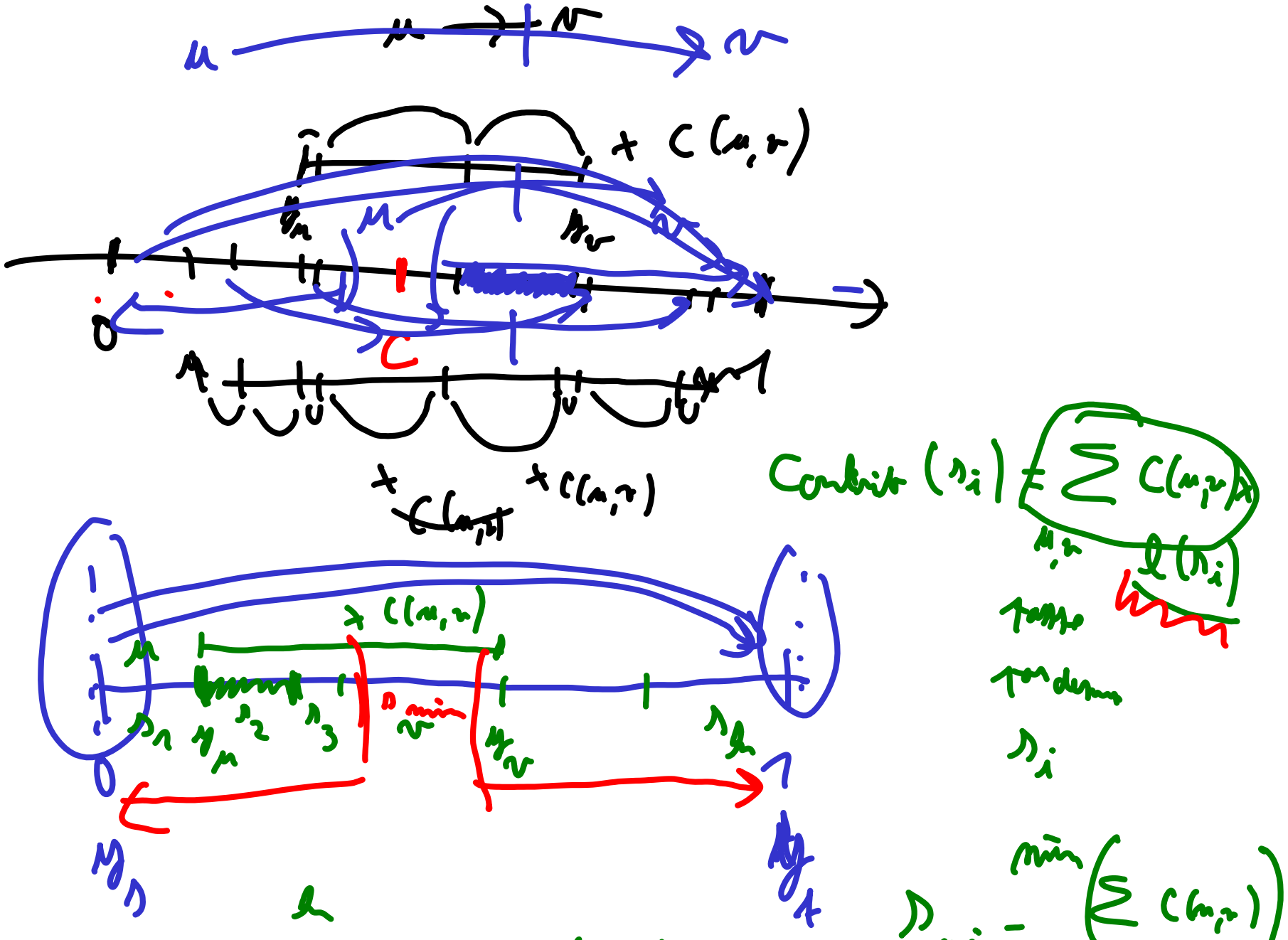
$y_t - y_s \geq 1$

$y_{uv} \geq y_v - y_u, \forall (u,v) \in A$

$y_{uv} \geq 0, \forall (u,v) \in A$

Démonstration.

- obj est minimum pour $y_{uv} = \max\{y_v - y_u, 0\}$
- obj est invariant par translation : on peut prendre $y_s = 0$
- obj diminue si pour tous les $y_u < 0$ on prend $y_u = 0$
- obj diminue si pour tous les $y_v > 1$ on prend $y_v = 1$ $(\Rightarrow y_t = 1)$
- considerons les bipartitions (U_c, V_c) definies pour $0 < c < 1$ par $U_c = \{u \in V \mid y_u < c\}$ et $V_c = \{v \in V \mid y_v > c\}$: $\exists c$ tel que obj diminue si $\forall u \in U_c$ on prend $y_c = 0$ et $\forall v \in V_c$ on prend $y_c = 1$


u
v
+ C(u,v)
C
+ C(u,v)
+ C(u,v)
C(u,v)
Coût(p_i) = Σ C(u,v)
(u,v) ∈ p_i
p_i
p_min = min (Σ C(u,v))
Σ_{i=1}^{k} Coût(p_i)

Programmation lineaire en nombres entiers

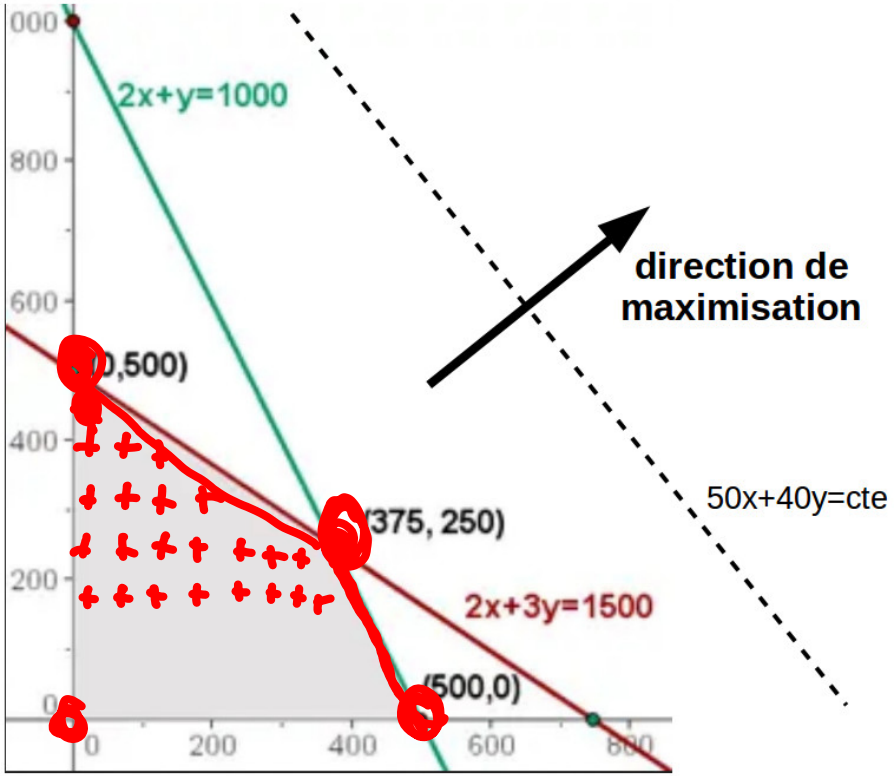
Définition

- un programme lineaire avec coefficients reels, comme precedemment
- mais on cherche les solutions entieres, c.a.d. avec tous les $x_i, i \in [\![1, n]\!]$ entiers (contrainte d'integralite)

Programmation lineaire en nombres entiers

Définition

- un programme lineaire avec coefficients reels, comme precedemment
- mais on cherche les solutions entieres, c.a.d. avec tous les $x_i, i \in [\![1, n]\!]$ entiers (contrainte d'integralite)



Programmation lineaire en nombres entiers

Définition

- un programme lineaire avec coefficients reels, comme precedemment
- mais on cherche les solutions entieres, c.a.d. avec tous les $x_i, i \in [\![1, n]\!]$ entiers (contrainte d'integralite)

Complexite de calcul : NP-complet
(contrairement a la programmation lineaire)

Programmation lineaire en nombres entiers

Définition

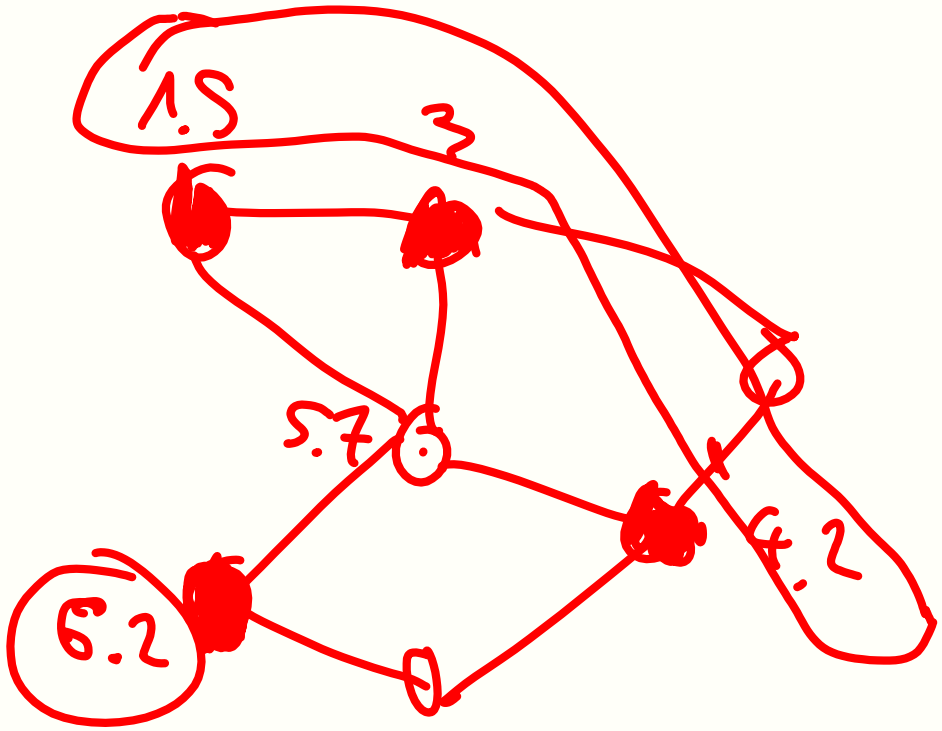
- un programme lineaire avec coefficients reels, comme precedemment
- mais on cherche les solutions entieres, c.a.d. avec tous les $x_i, i \in [\![1, n]\!]$ entiers (contrainte d'integralite)

Complexite de calcul : NP-complet
(contrairement a la programmation lineaire)

Resolution exacte : techniques de branching

Minimum Vertex cover (MVC)

- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$
  (non oriente, simple et sans boucles)
- **Sortie :** un sous ensemble $S \subseteq V$ de sommets qui couvrent toutes les aretes, c.a.d. tel que $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$
  et qui est de cardinalite minimum pour cette propriete.



Minimum Vertex cover (MVC)

- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$
  (non oriente, simple et sans boucles)
- **Sortie :** un sous ensemble $S \subseteq V$ de sommets qui couvrent toutes les aretes, c.a.d. tel que $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$
  et qui est de cardinalite minimum pour cette propriete.

Remarque

S est un vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable.
S est un minimum vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable maximum.

Minimum Vertex cover (MVC)

- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$
  (non oriente, simple et sans boucles)
- **Sortie :** un sous ensemble $S \subseteq V$ de sommets qui couvrent toutes les aretes, c.a.d. tel que $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$
  et qui est de cardinalite minimum pour cette propriete.

Remarque

S est un vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable.
S est un minimum vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable maximum.

Conclusion : Stable Maximum et Minimum Vertex Cover sont *en quelque sorte* "equivalents"... sauf que pas completement !

Minimum Vertex cover (MVC)

- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$
  (non oriente, simple et sans boucles)
- **Sortie :** un sous ensemble $S \subseteq V$ de sommets qui couvrent toutes les aretes, c.a.d. tel que $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$
  et qui est de cardinalite minimum pour cette propriete.

Remarque

S est un vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable.
S est un minimum vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable maximum.

Conclusion : Stable Maximum et Minimum Vertex Cover sont *en quelque sorte* "equivalents"... sauf que pas completement !

Complexite de calcul : Minimum Vertex Cover est NP-complet (car Stable Maximum l'est)

Minimum Vertex cover (MVC)

- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$
  (non oriente, simple et sans boucles)
- **Sortie :** un sous ensemble $S \subseteq V$ de sommets qui couvrent toutes les aretes, c.a.d. tel que $\forall uv \in E, u \in S$ ou $v \in S$
  et qui est de cardinalite minimum pour cette propriete.

Remarque

S est un vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable.
S est un minimum vertex cover ssi $V \setminus S$ est un stable maximum.

Conclusion : Stable Maximum et Minimum Vertex Cover sont *en quelque sorte* "equivalents"... sauf que pas completement !

Complexite de calcul : Minimum Vertex Cover est NP-complet (car Stable Maximum l'est)

Approximabilite : Minimum Vertex Cover : OUI. Stable Maximum : NON !

n sommets

MVC $\frac{3}{4}n$ → appx 2 → $2m$

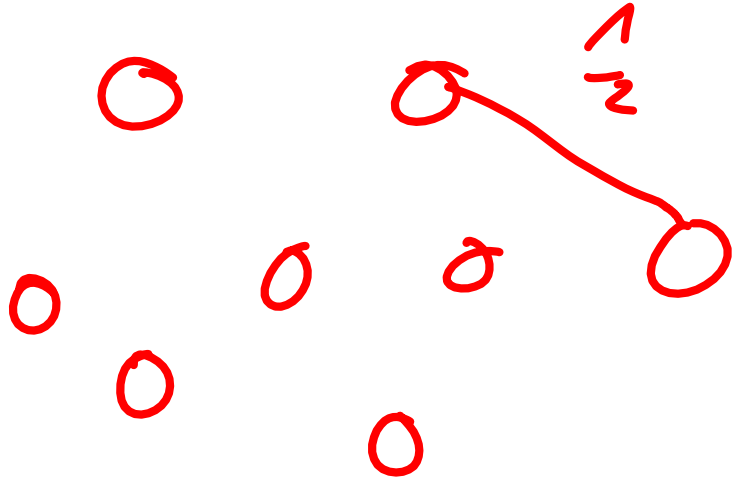
16

$8 \leq MVC \leq 16$

Stable max : $\frac{1}{4}n$

$n-16 \leq$ Stable max $\leq n-8$

$\frac{n-8}{n-16}$



$\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{n(n-1)}{2}$

Un prog. lineaire en nombres entiers pour Weighted MVC

Weighted : les sommets ont un poids w_i et on veut trouver S un MVC de poids $w(S)$ minimum (avec $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$)

Pb plus general, donc au moins aussi dur

Un prog. lineaire en nombres entiers pour Weighted MVC

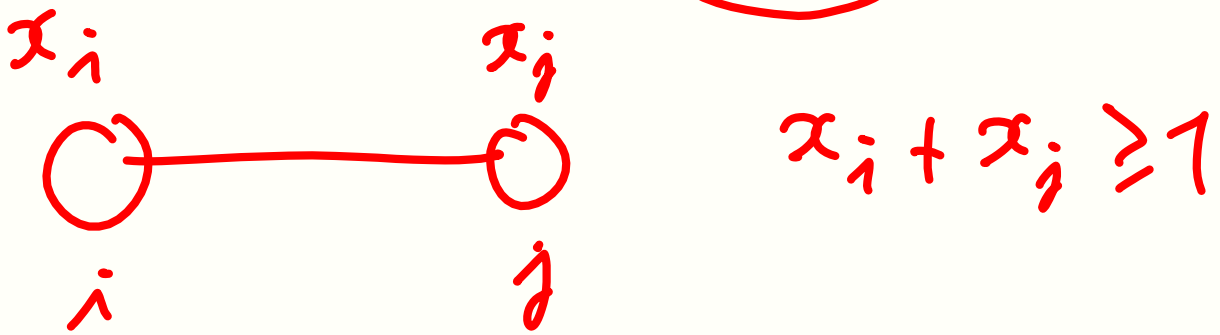
Weighted : les sommets ont un poids w_i et on veut trouver S un MVC de poids $w(S)$ minimum (avec $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$)
Pb plus general, donc au moins aussi dur

En nombres entiers :

minimiser $\sum_{i \in V} w_i x_i$ sous contraintes

$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$
$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V$

$x_i \in \mathbb{N}$ et $x_i \leq 1$



Un prog. lineaire en nombres entiers pour Weighted MVC

Weighted : les sommets ont un poids w_i et on veut trouver S un MVC de poids $w(S)$ minimum (avec $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$)
Pb plus general, donc au moins aussi dur

En nombres entiers :

minimiser $\sum_{i \in V} w_i x_i$ sous contraintes

$$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V$$

Relaxation lineaire :

minimiser $\sum_{i \in V} w_i x_i$ sous contraintes

$$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in V$$

relaxation

→ poly.
à résoudre.

Un prog. lineaire en nombres entiers pour Weighted MVC

Weighted : les sommets ont un poids w_i et on veut trouver S un MVC de poids $w(S)$ minimum (avec $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$)
Pb plus general, donc au moins aussi dur

En nombres entiers :

minimiser $\sum_{i \in V} w_i x_i$ sous contraintes

$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$

$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V$

Relaxation lineaire :

minimiser $\sum_{i \in V} w_i x_i$ sous contraintes

$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$

$0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in V$

Avantage : relaxation lineaire soluble en temps polynomial donne une solution reelle avec un meilleur objectif... mais non admissible.

Un prog. lineaire en nombres entiers pour Weighted MVC

Weighted : les sommets ont un poids w_i et on veut trouver S un MVC de poids $w(S)$ minimum (avec $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$)
Pb plus general, donc au moins aussi dur

En nombres entiers :

$$\text{minimiser } \sum_{i \in V} w_i x_i \text{ sous contraintes}$$

$$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V$$

Relaxation lineaire :

$$\text{minimiser } \sum_{i \in V} w_i x_i \text{ sous contraintes}$$

$$x_i + x_j \geq 1, \forall ij \in E$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in V$$

Avantage : relaxation lineaire soluble en temps polynomial donne une solution reelle avec un meilleur objectif... mais non admissible.

Algo d'approx : On va utiliser cette solution reelle non admissible pour en faire une solution entiere avec ratio d'approx garanti.

Arrondi de la solution reelle

- on resoud la relaxation lineaire en temps polynomial : on obtient une solution reelle minimum $\tilde{S} = (\tilde{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$

Arrondi de la solution reelle

- on resoud la relaxation lineaire en temps polynomial :
  on obtient une solution reelle minimum $\tilde{S} = (\tilde{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$

- on construit une solution entiere $S = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ par arrondi :
  $x_i = 1$ ssi $\tilde{x}_i \geq 1/2$

Arrondi de la solution reelle

- on resoud la relaxation lineaire en temps polynomial :
  on obtient une solution reelle minimum $\tilde{S} = (\tilde{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$
- on construit une solution entiere $S = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ par arrondi :
  $x_i = 1$ ssi $\tilde{x}_i \geq 1/2$
- on montre que S est un vertex cover et que $w(S) \leq 2w(S^*)$,
  ou S^* est une solution minimum en nombre entiers

Arrondi de la solution reelle

- on resoud la relaxation lineaire en temps polynomial :
  on obtient une solution reelle minimum $\tilde{S} = (\tilde{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$
- on construit une solution entiere $S = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ par arrondi :
  $x_i = 1$ ssi $\tilde{x}_i \geq 1/2$
- on montre que S est un vertex cover et que $w(S) \leq 2w(S^*)$,
  ou S^* est une solution minimum en nombre entiers

Lemme

Soit S^* un MVC de poids minimum et soit S la solution obtenue par arrondi a partir de la solution minimum $\tilde{S}$ de la relaxation lineaire. Alors S est un vertex cover et $w(S) \leq 2w(S^*)$.

Preuve du ratio d'approximation

Lemme

Soit S^* un MVC de poids minimum et soit S la solution obtenue par arrondi a partir de la solution minimum $\tilde{S}$ de la relaxation lineaire. Alors S est un vertex cover et $w(S) \leq 2w(S^*)$.

Démonstration.

Preuve du ratio d'approximation

Lemme

Soit S^* un MVC de poids minimum et soit S la solution obtenue par arrondi a partir de la solution minimum $\tilde{S}$ de la relaxation lineaire. Alors S est un vertex cover et $w(S) \leq 2w(S^*)$.

Démonstration.

- on remarque que $w(\tilde{S}) \leq w(S^*)$
  car la relaxation lineaire est moins contrainte

Preuve du ratio d'approximation

Lemme

Soit S^* un MVC de poids minimum et soit S la solution obtenue par arrondi a partir de la solution minimum $\tilde{S}$ de la relaxation lineaire. Alors S est un vertex cover et $w(S) \leq 2w(S^*)$.

Démonstration.

- on remarque que $w(\tilde{S}) \leq w(S^*)$
  car la relaxation lineaire est moins contrainte

- on montre que S est bien un vertex cover
  - soit $ij \in E$, comme $\tilde{x}_i + \tilde{x}_j \geq 1$, alors $\tilde{x}_i \geq 1/2$ ou $\tilde{x}_j \geq 1/2$
  - on a donc $x_i = 1$ ou $x_j = 1$: S est un vertex cover

Preuve du ratio d'approximation

Lemme

Soit S^* un MVC de poids minimum et soit S la solution obtenue par arrondi a partir de la solution minimum $\tilde{S}$ de la relaxation lineaire. Alors S est un vertex cover et $w(S) \leq 2w(S^*)$.

Démonstration.

- on remarque que $w(\tilde{S}) \leq w(S^*)$
  car la relaxation lineaire est moins contrainte
- on montre que S est bien un vertex cover
  - soit $ij \in E$, comme $\tilde{x}_i + \tilde{x}_j \geq 1$, alors $\tilde{x}_i \geq 1/2$ ou $\tilde{x}_j \geq 1/2$
  - on a donc $x_i = 1$ ou $x_j = 1$: S est un vertex cover
- on montre que $w(S) \leq 2w(\tilde{S})$ $\leq 2\, w(S^*)$
  - comme $x_i = 1$ si $\tilde{x}_i \geq 1/2$ et $x_i = 0$ sinon, alors $x_i \leq 2\tilde{x}_i$
  - d'ou, $w(S) \leq 2w(\tilde{S})$

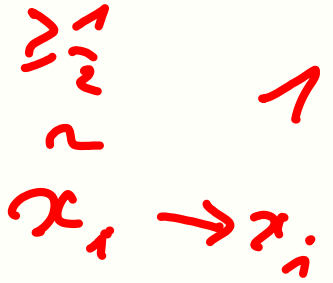
Preuve du ratio d'approximation

Lemme

Soit S^* un MVC de poids minimum et soit S la solution obtenue par arrondi a partir de la solution minimum $\tilde{S}$ de la relaxation lineaire. Alors S est un vertex cover et $w(S) \leq 2w(S^*)$.

Démonstration.

- on remarque que $w(\tilde{S}) \leq w(S^*)$
  car la relaxation lineaire est moins contrainte



- on montre que S est bien un vertex cover
  - soit $ij \in E$, comme $\tilde{x}_i + \tilde{x}_j \geq 1$, alors $\tilde{x}_i \geq 1/2$ ou $\tilde{x}_j \geq 1/2$
  - on a donc $x_i = 1$ ou $x_j = 1$: S est un vertex cover

- on montre que $w(S) \leq 2w(\tilde{S})$
  - comme $x_i = 1$ si $\tilde{x}_i \geq 1/2$ et $x_i = 0$ sinon, alors $x_i \leq 2\tilde{x}_i$
  - d'ou, $w(S) \leq 2w(\tilde{S})$

- comme $w(\tilde{S}) \leq w(S^*)$, on obtient $w(S) \leq 2w(S^*)$