TD1 - Proprietes et modeles

SYSTEMES COMPLEXES AVANCES

M1 Informatique - Semestre 1 - Année 2022-2023

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr

Le sujet sera traite sur deux seances d'1h30. Il est recommande que vous utilisiez les exercices que vous n'avez pas eu le temps de faire en seance comme entrainement en vue de l'examen final.

Exercice 1.

$\frac{\sum d^{\circ}}{n} = \frac{2m}{n} = 4$

a. Quel est le degre moyen dans un graphe G ayant 1000 sommets et 2000 aretes ?

b. Quelle est sa densite ?

$\frac{4}{999} \approx 0{,}004$ densité

c. Quelle probabilite p faut-il prendre dans le modele $G_{n,p}$ pour que l'esperance de la densite soit la densite du graphe G ci-dessus ?

$p = 0{,}004$

d. Quelle est l'esperance du degre moyen dans $G_{n,p}$ pour $p = \frac{2}{n}$? pour $p = \frac{\log n}{n}$?

$\log n \times \frac{n-1}{n}$

arbre : $\frac{2(n-1)}{n} \sim 2$

Exercice 2.

$n-1$

$\frac{2}{n} \times (n-1) \sim 2$

K_4 K_5

a. Quel est l'esperance du nombre de triangles dans $G_{n,p}$?

↳ $\langle k \rangle$ lié $p = \frac{\langle k \rangle}{n}$???

b. On genere un graphe $G_{n,p}$ avec $n = 1000$ et $p = 1/10$, quelle est le nombre attendu de cliques de taille 4 ? de cliques de taille 5 ? Pour quelle taille de clique k ce nombre devient-il inferieur a 1 ?

G

clique = sous graphe complet

Exercice 3.

clique

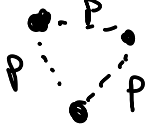
a. Ecrivez un algorithme qui genere un graphe avec le modele $G_{n,m}$.

Indication. Pensez a gerer les possibles boucles et les aretes multiples, tout en preservant l'uniformite du tirage aleatoire.

b. Quelle est la probabilite de tirer une boucle a une etape donnee ?

c. Quelle est la probabilite de tirer une arete deja presente dans le graphe a une etape donnee ?

Tri en dépendance



proba d'un triangle pour un triplet fixé : p^3

nb de triplet : $\dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3!} = C_n^3$

$p = \dfrac{\lambda}{n}$ $\quad p^3 \times C_n^3 = \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^3 \times \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sim \dfrac{\lambda^3}{3!}$

espérance du nb de triangles avec degré moy fixé.

lorsque $n \to +\infty$

λ fixé = cte.

$p^4 \times C_n^4 \qquad \dfrac{1}{10^4} \times \dfrac{(10^3)^4}{4!} = 10^8 \sim \boxed{10^6}$

$p^5 \times C_n^5 = \dfrac{1}{10^5} \times \dfrac{(10^3)^5}{5!} = \dfrac{10^8}{\;}$

$p^k \times C_n^k = \dfrac{1}{10^k} \times \dfrac{(10^3)^k}{k!} \sim 1$ pour quel k

d. Majorer la complexite de votre algorithme en esperance ? On s'interesse uniquement au cas ou $m \leq \frac{n(n-1)}{4}$.

e. Pouvez vous trouver un autre moyen plus simple d'eviter les boucles et les aretes multiples ? Quel est l'inconvenient de cette solution ? Est-il vraiment genant ?

Exercice 4.

a. Ecrivez l'algorithme qui genere un graphe avec le modele de configuration, sans gerer les boucles ni les aretes multiples.

b. Quelle est la complexite de votre algorithme ?

c. Majorez l'esperance de la complexite d'une etape si on verifie la creation d'une arete multiple ?

d. Peut-on simplement rejeter les boucles et aretes multiples et continuer l'algorithme jusqu'a terminaison ?

Exercice 5.

a. Vers quoi tend la densite dans le modele $G_{n,p}$ lorsque le degre moyen est fixe et que $n \to +\infty$?

b. Vers quoi tend le coefficient de clustering global dans $G_{n,p}$ lorsque le degre moyen est fixe et que $n \to +\infty$?

c. Donnez une famille de graphes $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dont le degre moyen et le coefficient de clustering global tendent tous deux vers des constantes lorsque $n \to +\infty$.

On note cc_{glob} le coefficient de clustering global, cc_{loc} le coefficient de clustering local et nb_{tri} le nombre de triangles d'un graphe.

Exercice 6.

a. Donnez une famille de graphes $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $cc_{glob}(H_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ alors que $\exists a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cc_{loc}(H_n) \geq a$.

b. A l'inverse, donnez une famille de graphes $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $cc_{loc}(H_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ alors que $\exists a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cc_{glob}(H_n) \geq a$.