TD1 - Indenombrabilite et denombrabilite

Grands concepts d'informatique fondamentale

L3 Informatique - Semestre printemps - Année 2022-2023

Université Côte d'Azur

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr

Exercice 1.

Montrez que $\mathbb{N}$ est infini.

Exercice 2.

Montrez que $\mathbb{Z}$ est denombrable.

Exercice 3.

Montrez que $\mathbb{N}^2$ est denombrable.

Exercice 4.

Montrez que $\mathbb{Q}$ est denombrable.

Exercice 5.

Definition [Nombres algebriques]
Un reel $x \in \mathbb{R}$ est algebrique ssi il est racine d'un polynome a coefficients rationnels.

a. Montrez que pour tout nombre algebrique a, il existe un polynome a coefficients entiers P dont il est racine (c.a.d. $P(a) = 0$).

Definition [Hauteur d'un polynome]
La hauteur d'un polynome $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est definie comme $h(P) = n + \sum_{i=0}^{n} a_i$.

b. Montrez que le nombre de polynomes a coefficient entiers de hauteur exactement h est fini et donnez en une majoration explicite.

c. Montrez que l'ensemble des nombres algebriques est denombrable.

Indication. Vous pourrez montrer pour cela qu'on peut enumerer les nombres algebriques.

d. Ecrivez un "algorithme" [1], en pseudo-code, qui enumere tous les polynomes a coefficients entiers.

Exercice 6.

Soit Σ un alphabet fini. L'ensemble des mots finis sur Σ est note Σ^*.

a. Montrez que Σ^* est denombrable.

Indication. Pour cela, montrez qu'on peut enumerer l'ensemble des mots $w \in \Sigma^*$.

b. Ecrivez un "algorithme", en pseudo-code, qui enumere les mots $w \in \Sigma^*$.

c. Peut on enumerer les mots $w \in \Sigma^*$ dans l'ordre lexicographique.

Exercice 7.

Soit Σ un alphabet fini. Un mot infini w sur Σ est une suite $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de lettres de Σ, avec $\forall i \in \mathbb{N}, w_i \in \Sigma$.

a. Montrez que si $|\Sigma| > 1$, alors l'ensemble des mots infinis sur Σ est indenombrable.

Indication. Utilisez le procede d'extraction diagonal exactement comme dans la preuve de l'indenombrabilite de $\mathbb{R}$.

b. L'ensemble des mots finis sur un alphabet infini est-il denombrable ? Justifiez.

c. Soit Σ_1 un alphabet fini tel que $|\Sigma_1| > 1$ et soit Σ_2 un alphabet infini denombrable. Montrez que les mots infinis sur Σ_2 sont en bijection avec les mots infinis sur Σ_1.

Exercice 8.

Soit Σ un alphabet fini. Un mot infini w sur Σ est une suite $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de lettres de Σ, avec $\forall i \in \mathbb{N}, w_i \in \Sigma$.

a. Montrez que si $|\Sigma| > 1$, alors l'ensemble des mots infinis sur Σ est indenombrable.

Indication. Utilisez le procede d'extraction diagonal exactement comme dans la preuve de l'indenombrabilite de $\mathbb{R}$.

b. L'ensemble des mots finis sur un alphabet infini est-il denombrable ? Justifiez.

c. Soit Σ_1 un alphabet fini tel que $|\Sigma_1| > 1$ et soit Σ_2 un alphabet infini denombrable. Montrez que les mots infinis sur Σ_2 sont en bijection avec les mots infinis sur Σ_1.

Exercice 9.

Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

---

1. Ce n'est pas exactement ce que nous appelerons un algorithme dans la suite du cours car la procedure que vous devez decrire ne termine pas.

Théorème [Cantor-Bernstein]
Soient E et F deux ensembles quelconques. S'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E, alors il existe une bijection $\hat{f}$ entre E et F.

Exercice 10.

Le but de cet exercice est de demontrer le theoreme de Cantor-Bernstein.

a. Expliquez pourquoi on peut supposer sans perte de generalite que E et F sont disjoints.

On note $a = \perp$ pour signifier que a est indefini. Une suite d'element de $X \cup \{\perp\}$, ou X est un ensemble quelconque, est dite finie s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}, i \geq k \Rightarrow x_i = \perp$. Pour tout $x \in E$ on definit une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, finie ou infinie, d'elements de $E \cup F \cup \{\perp\}$ par recurrence de la facon suivante :

- $x_0 = x$
- pour $n \in \mathbb{N}$,
  - si $x_n = \perp$ alors $x_{n+1} = \perp$
  - si $x_n \neq \perp$ et $x_n \in E$ (c.a.d. n pair)
    - si $\exists y \in F$, $g(y) = x_n$ alors $x_{n+1} = y$ (comme g est injective, y est unique)
    - si $\nexists y \in F$, $g(y) = x_n$ alors $x_{n+1} = \perp$
  - si $x_n \neq \perp$ et $x_n \in F$ (c.a.d. n impair)
    - si $\exists y \in E$, $f(y) = x_n$ alors $x_{n+1} = y$ (comme f est injective, y est unique)
    - si $\nexists y \in E$, $f(y) = x_n$ alors $x_{n+1} = \perp$

b. Montrez que si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite infinie, alors tous ses termes appartiennent a $E \cup F$.

On adopte les notations suivantes :
$E_\infty = \{x \in E \mid (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est une suite infinie}\}$,
$E_E = \{x \in E \mid (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est une suite finie et termine sur un element de} E\}$ et
$E_F = \{x \in E \mid (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est une suite finie et termine sur un element de} F\}$.
On definie de maniere similaire F_∞, F_F et F_E.

c. Remarquez que E_∞, E_E et E_F sont disjoints et qu'on a $E = E_\infty \cup E_E \cup E_F$, et idem sur F.

d. Montrez que f est une bijection de E_E sur F_E.

e. Montrez que f est une bijection de E_∞ sur F_∞.

f. Montrez que g est une bijection de F_F sur E_F.

g. Construisez une bijection de E sur F.